

# Derivada de una función

## ACTIVIDADES

### 1. Página 190

$$\begin{aligned} \text{a) } T.V.M.([2, 3]) &= \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{-\frac{8}{3}+1}{1} = -\frac{5}{3} & T.V.M.([-3, -2]) &= \frac{f(-2)-f(-3)}{-2+3} = \frac{-1+\frac{8}{3}}{1} = \frac{5}{3} \\ \text{b) } T.V.M.([2, 3]) &= \frac{g(3)-g(2)}{3-2} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{1} = -\frac{1}{6} & T.V.M.([-3, -2]) &= \frac{g(-2)-g(-3)}{-2+3} = \frac{-2+1}{1} = -1 \end{aligned}$$

### 2. Página 190

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-1+h)+(-1+h)^2+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = 0 \\ \text{b) } f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{-1+h}+2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{-1+h} = -2 \end{aligned}$$

### 3. Página 191

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3-2+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3+3h^2+3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2+3h+3) = 3$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y+1=3(x-1) \rightarrow y=3x-4$

### 4. Página 191

$$f(3) = 2$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+h}-2) \cdot (\sqrt{4+h}+2)}{h \cdot (\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h} + \cancel{h} - \cancel{h}}{\cancel{h} \cdot (\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y-2=-4(x-3) \rightarrow y=-4x+14$

### 5. Página 192

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ -\frac{4}{x} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$f'(-2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{4}{-2+h}-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4-4h}{(-2+h) \cdot h} = -\infty \rightarrow \text{No existe.}$$

$$f'(-2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-2+h)^2-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2-4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (h-4) = -4$$

6. Página 192

$$a) f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Las derivadas laterales no existen, por lo que la función no es derivable en  $x = 0$ .

$$b) f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^{\frac{1}{4}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^{\frac{1}{4}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = \not\exists$$

$f'(0^-)$  no existe, ya que  $h$  es un número negativo y la función no está definida para números negativos.

Por tanto, la función no es derivable en  $x = 0$ .

7. Página 193

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 12x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- Si  $x < 3 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(-\infty, 3)$ .
- Si  $x > 3 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(3, +\infty)$ .
- Si  $x = 3$ :

$$f(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (12x - x^2) = 27 \qquad f(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x - 3) = 3$$

La función no es continua en  $x = 3$  por no coincidir los límites laterales.

Como la función no es continua en  $x = 3$ , se puede afirmar que tampoco es derivable en ese punto.

8. Página 193

$$f(x) = 2x + |x + 2| \rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -4 \qquad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -4 \rightarrow \text{La función es continua en } x = -2 \rightarrow \text{Es continua en toda la recta real.}$$

$$f'(-2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(-2+h) + 2 + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h}{h} = 3$$

$$f'(-2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-2+h) - 2 + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en  $x = -2$ .

9. Página 194

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 + 2(x+h)^2 - x^3 - 2x^2}{h} = 3x^2 + 4x$$

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 4(x+h) - 3x^2 - 4x}{h} = 6x + 4$$

$$f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h) + 4 - 6x - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h} = 6$$

$$f^{IV}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'''(x+h) - f'''(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 - 6}{h} = 0$$

A partir de la cuarta derivada todas las derivadas son iguales a 0.

### 10. Página 194

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h \cdot x \cdot (x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(x+h)^2} + \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x^2 + (x+h)^2}{h \cdot x^2 \cdot (x+h)^2} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{(x+h)^3} - \frac{2}{x^3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h^2x - 6hx^2 - 2h^3}{h \cdot x^3 \cdot (x+h)^3} = \frac{-6x^2}{x^6} = \frac{-6}{x^4}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

### 11. Página 195

a)  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x$

$$h(x) = 7 \cdot f'(x) + 3 \cdot g'(x)$$

$$h'(x) = 7 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} + 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 7 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} + 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 14x + 3$$

b)  $f(x) = x$  y  $g(x) = x + 1$

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} + 2 \cdot f(x) \rightarrow h'(x) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} + 2 \cdot f'(x)$$

$$\text{Así: } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h+1) - (x+1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{Entonces: } h'(x) = \frac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2} + 2 \cdot 1 = \frac{-1}{x^2} + 2$$

c)  $f(x) = x$  y  $g(x) = x + 1$

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow h'(x) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

$$\text{Entonces: } h'(x) = \frac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

d)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  y  $g(x) = x^2$

$$h(x) = f(x) + 5 \cdot g(x) \rightarrow h'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2hx - h^2}{h \cdot x^2 \cdot (x+h)^2} + 5 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = -\frac{2}{x^3} + 10x$$

## 12. Página 195

$$\begin{aligned} [f(x) - g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h)] - [f(x) - g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) - g'(x) \end{aligned}$$

Sea  $f(x) = x$  y  $g(x) = x^2$ .

Entonces:  $h(x) = 3 \cdot f(x) - g(x) \rightarrow h'(x) = 3 \cdot f'(x) - g'(x)$

$$\text{Así: } h'(x) = 3 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 3 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = 3 - 2x$$

## 13. Página 196

$$\text{a) } f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{-(x-1) \cdot \operatorname{sen} x - \cos x}{(x-1)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x}{x-1} - \frac{\cos x}{(x-1)^2}$$

$$\text{c) } f'(x) = e^x \cdot (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$\text{d) } f'(x) = 2e^{2x}$$

## 14. Página 196

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \cdot \ln \left( \frac{x+h}{x} \right) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left( \frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \ln \left( \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right) = \ln e^{\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{x+h}{x} - 1 \right) \frac{1}{h}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

## 15. Página 197

$$\text{a) } f'(x) = 2x(e^{x^2} - e^{-x^2})$$

$$\text{b) } f'(x) = 2\cos x \cdot e^{2\operatorname{sen} x}$$

$$\text{c) } f'(x) = -2x \cdot 2 \cdot \cos(x^2 + 1) \cdot \operatorname{sen}(x^2 + 1) = -2x \cdot \operatorname{sen}(2x^2 + 2)$$

$$\text{d) } f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

## 16. Página 197

$$\text{a) } f'(x) = -\frac{3}{1-3x}$$

$$\text{b) } f(x) = \ln \left( \frac{2x+1}{1-2x} \right) = \ln(2x+1) - \ln(1-2x) \rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x+1} + \frac{2}{1-2x} = \frac{4}{1-4x^2}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(5x+3) \rightarrow f'(x) = \frac{5}{10x+6}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{1}{2} [\ln(2x+1) - \ln(1-2x)] \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{2x+1} + \frac{2}{1-2x} \right) = \frac{2}{1-4x^2}$$

## 17. Página 198

$$\text{a) } \ln(f(x)) = \ln(x^{\cos x}) \rightarrow \ln(f(x)) = \cos x \cdot \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\operatorname{sen} x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \rightarrow f'(x) = \left( -\operatorname{sen} x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) \cdot x^{\cos x}$$

$$\text{b) } \ln(f(x)) = \ln\left((\sqrt{x})^x\right) \rightarrow \ln(f(x)) = \frac{x}{2} \cdot \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \cdot \ln x + \frac{x}{2x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x + 1) \cdot (\sqrt{x})^x$$

$$\text{c) } \ln(f(x)) = \ln\left((\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}\right) \rightarrow \ln(f(x)) = x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} x}$$

$$f'(x) = \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} x} \right) \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}$$

$$\text{d) } \ln(f(x)) = \ln(x - \operatorname{sen} x)^x$$

$$\ln(f(x)) = x \cdot \ln(x - \operatorname{sen} x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x - \operatorname{sen} x) + x \cdot \frac{1 - \cos x}{x - \operatorname{sen} x} \rightarrow f'(x) = \left( \ln(x - \operatorname{sen} x) + \frac{x \cdot (1 - \cos x)}{x - \operatorname{sen} x} \right) \cdot (x - \operatorname{sen} x)^x$$

## 18. Página 198

$$\text{a) } \ln(f(x)) = \ln(x^n) \rightarrow \ln(f(x)) = n \cdot \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = n \cdot \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = n \cdot \frac{1}{x} \cdot x^n = n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{b) } \ln(f(x)) = \ln(a^x) \rightarrow \ln(f(x)) = x \cdot \ln a$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln a \rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

## 19. Página 199

$$\text{a) } 3x^2 - 3 + 2yy' = 0 \rightarrow 2yy' = 3 - 3x^2 \rightarrow y' = \frac{3 - 3x^2}{2y}$$

$$y'(7, -2) = \frac{3 - 3 \cdot 7^2}{2 \cdot (-2)} = 36$$

$$\text{b) } 10x + 3y + 3xy' + 12yy' - 1 + 13y^2 + 26xyy' = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (3x + 12y + 26xy)y' = 1 - 10x - 3y - 13y^2 \rightarrow y' = \frac{1 - 10x - 3y - 13y^2}{3x + 12y + 26xy}$$

$$y'(7, -2) = \frac{1 - 10 \cdot 7 - 3 \cdot (-2) - 13 \cdot (-2)^2}{3 \cdot 7 + 12 \cdot (-2) + 26 \cdot 7 \cdot (-2)} = \frac{115}{367}$$

## 20. Página 199

$$f'(x) = 2x$$

$$\bullet (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\bullet (f^{-1})'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## SABER HACER

## 21. Página 200

Primero se halla la derivada de la función:  $f'(x) = \ln x + 1$

Después, se calcula la derivada de la función en el punto, que es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto:  $f'(e) = \ln e + 1 = 2$

Se calcula el valor de la función en el punto:  $f(e) = e \cdot \ln e = e$

Así:  $y - e = 2(x - e) \rightarrow y = 2x - e$

## 22. Página 200

Primero se calcula la pendiente de las rectas tangentes. Como son paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, forman un ángulo de  $45^\circ$ :

$$m = \operatorname{tg} 45^\circ \rightarrow m = 1$$

Después, se halla la derivada de la función:  $f'(x) = 9x^2$ .

A continuación, se calcula la derivada de la función en el punto:

$$f'(a) = 9a^2 \rightarrow 9a^2 = 1 \rightarrow a = \pm \frac{1}{3}$$

Para terminar, se hallan los puntos  $(a, f(a)) = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right) \right) = \left( \frac{1}{3}, \frac{19}{9} \right) \\ \left( -\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right) \right) = \left( -\frac{1}{3}, \frac{17}{9} \right) \end{array} \right.$

## 23. Página 201

Se calcula la derivada de la función:  $f'(x) = (a-1) \cdot \cos x + b$

Se obtiene el valor de la derivada de la función en el punto dado:

$$f'(\pi) = (a-1) \cdot \cos \pi + b = 1 - a + b$$

Como la pendiente de la recta tangente es  $-1$ :  $(a-1) \cdot \cos \pi + b = -1 \rightarrow b - a = -2$

Con la ecuación de la recta tangente en  $x = \pi$ , se obtiene el valor  $y(\pi) \rightarrow y(\pi) = -\pi + 1$

Se determina el valor de la función en dicho punto:  $f(\pi) = (a-1) \cdot \operatorname{sen} \pi + b\pi = b\pi$

Ambas funciones se cortan en el punto, luego  $b\pi = -\pi + 1 \rightarrow b = \frac{1-\pi}{\pi}$

Así,  $a = b + 2 \rightarrow a = \frac{1+\pi}{\pi}$

## 24. Página 201

Primero se estudia la continuidad de la función:

Si  $x < 1$  o  $x > 1$ , la función es continua por ser un polinomio. Hay que comprobar qué sucede en el punto en el que cambia su expresión algebraica.

$$f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 4x + 3) = 1 - 4 + 3 = 0 \quad f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4x - 3) = -1 + 4 - 3 = 0$$

Por tanto, la función es continua en  $\mathbb{R}$ .

A continuación, se estudia la derivabilidad de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si  $x < 1$  o  $x > 1$ , la función es derivable por ser un polinomio. Hay que comprobar qué sucede en el punto en el que cambia su expresión algebraica.

$$x = 1 \rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2 - 4 = -2 \\ f'(1^+) = -2 + 4 = 2 \end{cases} \rightarrow \text{Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en } x = 1.$$

## 25. Página 202

Primero se estudia la continuidad de la función:

Si  $x < 0$  o  $x > \pi$ , la función es continua por ser un polinomio. Si  $0 < x < \pi$ , la función es continua por ser una función trigonométrica. Veamos qué sucede en los puntos donde cambia su expresión algebraica.

• Si  $x = 0$ :

$$f(0) = 0 \quad f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sin(a \cdot 0) = 0$$

En  $x = 0$ , la función siempre es continua, independientemente del parámetro  $a$ .

• Si  $x = \pi$ :

$$f(\pi) = (\pi - \pi)^2 + 1 = 1 \quad f(\pi^-) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \sin(a \cdot \pi) \quad f(\pi^+) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = (\pi - \pi)^2 + 1 = 1$$

Para que la función sea continua en  $x = \pi$  debe cumplirse que:

$$\sin(a \cdot \pi) = 1 \rightarrow a\pi = \frac{(2k+1) \cdot \pi}{2} \rightarrow a = \frac{2k+1}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

A continuación, se calcula la derivabilidad de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2k+1}{2} \cdot \cos\left(\frac{(2k+1) \cdot x}{2}\right) & \text{si } 0 < x < \pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2(x - \pi) & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Si  $x < 0$  o  $x > \pi$ , la función es derivable por ser un polinomio. Veamos qué sucede en los puntos en los que cambia su expresión algebraica:

$$f'(0^-) = 2 \quad f'(0^+) = \frac{2k+1}{2} \quad f'(\pi^-) = \frac{2k+1}{2} \cdot \cos\left(\frac{(2k+1) \cdot \pi}{2}\right) \quad f'(\pi^+) = 0$$

En  $x = 0$ , la función no es derivable, porque  $2 = \frac{2k+1}{2} \rightarrow k = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ .

En  $x = \pi$ , la función es derivable para cualquier valor entero de  $k$ .

## 26. Página 202

$$\text{a) } g'(x) = 2e^x \quad g'(f(x)) = 2e^{\text{tg}(x^2+1)} \rightarrow (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{4x \cdot e^{\text{tg}(x^2+1)}}{\cos^2(x^2+1)}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2+1)} \quad f'(g(x)) = \frac{4e^x}{\cos^2((2e^x)^2+1)}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{8e^{2x}}{\cos^2((2e^x)^2+1)}$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2+1)} \quad f'(f(x)) = \frac{2\text{tg}(x^2+1)}{\cos^2((\text{tg}(x^2+1))^2+1)}$$

$$(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{2 \cdot \text{tg}(x^2+1)}{\cos^2((\text{tg}(x^2+1))^2+1)} \cdot \frac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$$

## 27. Página 203

$$f'(x) = \ln(h(x)) + \frac{x \cdot h'(x)}{h(x)} + \frac{2h(x)h'(x)x - h^2(x)}{x^2}$$

$$\text{Como } h(1) = 3 \text{ y } h'(1) = 2, \text{ resulta: } f'(1) = \ln(h(1)) + \frac{1 \cdot h'(1)}{h(1)} + \frac{2h(1)h'(1) - h^2(1)}{1^2} = \ln 3 + \frac{1 \cdot 2}{3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 - (3)^2}{1^2} = \ln 3 + \frac{11}{3}$$

## 28. Página 203

$$\ln(f(x)) = \ln(\text{tg } x)^{x+3} \rightarrow \ln(f(x)) = (x+3)\ln(\text{tg } x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\text{tg } x) + (x+3) \cdot \frac{1}{\text{tg } x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos x \cdot \text{sen } x} = \ln(\text{tg } x) + \frac{x+3}{\cos x \cdot \text{sen } x}$$

$$f'(x) = \left( \ln(\text{tg } x) + \frac{x+3}{\cos x \cdot \text{sen } x} \right) \cdot f(x) = \left( \ln(\text{tg } x) + \frac{x+3}{\cos x \cdot \text{sen } x} \right) \cdot (\text{tg } x)^{x+3}$$

## 29. Página 203

$(a, b) = (1, 1)$  es el centro de la circunferencia.

$A(3, 3)$  es un punto por el que pasa la circunferencia.

$r$  es el radio.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \rightarrow r^2 = (3-1)^2 + (3-1)^2 = 8 \rightarrow r^2 = 8$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es ecuación es:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$$

Derivamos implícitamente la ecuación respecto de la variable  $x$ :

$$2(x-1) + 2(y-1)y' = 0 \rightarrow y' = -\frac{2(x-1)}{2(y-1)} = -\frac{x-1}{y-1}$$

El valor de  $y'$  en el punto  $A(3, 3)$  es  $y' = -\frac{3-1}{3-1} = -1$ . Así, la pendiente de la recta tangente es  $-1$ .

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es:  $y-3 = -1 \cdot (x-3) \rightarrow y = -x+6$



## ACTIVIDADES FINALES

## 30. Página 204

$$T.V.M.([-1, 2]) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$T.V.M.([-1, 3]) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{5 + 3}{4} = 2$$

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 - 4 + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h + h^2}{h} = -2$$

## 31. Página 204

$$T.V.M.([1, 6]) = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{\frac{3}{8} - 1}{5} = -\frac{1}{8}$$

$$T.V.M.([1, 4]) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{(1+h)+2} - \frac{3}{1+2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{3} - \cancel{3} - h}{h(3+h)} = -\frac{1}{3}$$

## 32. Página 204

$$f(x) = \ln(x + b)$$

$$T.V.M.([0, 2]) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{\ln(2+b) - \ln b}{2} = \frac{\ln\left(\frac{2+b}{b}\right)}{2} = \ln 2 \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(0 + h + \frac{2}{3}\right) - \ln\left(0 + \frac{2}{3}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{h + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{3h+2}{2}\right)}{h} = \frac{3}{2}$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(2 + h + \frac{2}{3}\right) - \ln\left(2 + \frac{2}{3}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{h + \frac{8}{3}}{\frac{8}{3}}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{3h+8}{8}\right)}{h} = \frac{3}{8}$$

## 33. Página 204

$$T.V.M.([0, 6]) = \frac{s(6) - s(0)}{6} = \frac{116 - 2}{6} = 19$$

## 34. Página 204

La función que mide la superficie de un círculo según la longitud de su radio  $x$  es:  $f(x) = \pi x^2$

$$T.V.M.([1, 3]) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9\pi - \pi}{2} = 4\pi$$

$$T.V.M.([3, 5]) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{25\pi - 9\pi}{2} = 8\pi$$

Aunque la variación del radio es la misma, la variación de la superficie no permanece constante.

## 35. Página 204

$$a) T.V.M.([1, 7]) = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{245 - 5}{6} = 40$$

$$T.V.M.([1, 5]) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{125 - 5}{4} = 30$$

$$b) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(1+h)^2 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h + 5h^2}{h} = 10$$

## 36. Página 204

$$a) f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$$

$$b) f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h + h^2}{h} = -2$$

$$c) f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^3 - (-2)^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 - 6h^2 + 12h}{h} = 12$$

$$d) f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = 1$$

$$e) f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3\left(\frac{1}{2}+h\right)^2 + 2 - \frac{11}{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 3h}{h} = 3$$

$$f) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h-2)^2 + 3 - (-1)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = -2$$

$$g) f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(-1+h)^2}{2} - \frac{(-1+h)^3}{3} + 4(-1+h) - 5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 4 - 5\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2h^2 + 9h + 12)}{6h} = 2$$

## 37. Página 204

$$a) f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah + \cancel{b} - \cancel{b}}{h} = a$$

$$b) f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(0+h)^2 + b(0+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (ah + b) = b$$

$$c) f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah^2 + bh + \cancel{c} - \cancel{c}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (ah + b) = b$$

$$d) f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah^3 + bh^2 + ch + \cancel{d} - \cancel{d}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (ah^2 + bh + c) = c$$

## 38. Página 204

$$a) f'(x) = 4x + 4x^3 \rightarrow f'(2) = 40$$

$$b) f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4}$$

$$c) f'(x) = -\frac{2}{x^3} \rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4}$$

$$d) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{4}$$

$$e) f'(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{si } x < -3 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > -3 \\ -1 & \text{si } x < -3 \end{cases} \rightarrow f'(2) = 1$$

$$f) f'(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h-2}{h} = 1$$

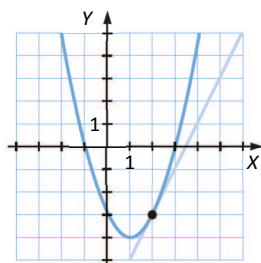
$$f'(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2+h)+2}{h} = -1$$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales; por tanto, la función no es derivable en  $x = 2$ .

### 39. Página 204

$$f(2) = -3 \quad f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(2) = 2$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y + 3 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 7$



### 40. Página 204

$$f(1) = 1 - a + 6 = 2 \rightarrow a = 5$$

$$f'(x) = 2x - 5 \rightarrow f'(1) = -3$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y - 2 = -3(x - 1) \rightarrow y = -3x + 5$

### 41. Página 204

$$a) f(-1) = -1 \quad f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \rightarrow f'(-1) = -\frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y + 1 = -\frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

$$b) f(0) = \ln 1 = 0 \quad f'(x) = \frac{3}{3x+1} \rightarrow f'(0) = 3$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y = 3x$

$$c) f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y - 2 = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y = -x + \frac{\pi+4}{2}$

$$d) f(1) = 2 \quad f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$

## 42. Página 204

$$f(-1) = \ln 1 = 0 \quad f'(x) = \frac{1}{2x+3} \rightarrow f'(-1) = 1$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y = x + 1$

La ecuación de la recta normal es:  $y = -x - 1$

## 43. Página 204

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^0 - 3 = -2 \quad f'(x) = 4e^{4x+2} \rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y + 2 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = 4x$

## 44. Página 204

$\frac{x-2}{x+1} = 0 \rightarrow x = 2$  es el punto de corte de  $f$  con el eje de abscisas.

$$f(2) = 0 \quad f'(x) = \frac{(x+1) - (x-2)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{3}$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y = \frac{1}{3}(x-2) \rightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

La ecuación de la recta normal es:  $y = -3(x-2) \rightarrow y = -3x + 6$

## 45. Página 204

$$f(3) = \sqrt{4} = 2 \quad f'(x) = \frac{2x(4-x) + (x^2-5)}{2(4-x)^2 \sqrt{\frac{x^2-5}{4-x}}} = \frac{-x^2 + 8x - 5}{2(4-x)^2 \sqrt{\frac{x^2-5}{4-x}}} \rightarrow f'(3) = \frac{10}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y - 2 = \frac{10}{4}(x-3) \rightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}$

## 46. Página 204

$$x^3 + x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2, x = -3$$

Tenemos que hallar las rectas que pasan por el punto (2, 1):  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 6 \rightarrow f'(2) = 10$

La ecuación de la recta tangente es:  $y - 1 = 10(x - 2) \rightarrow y = 10x - 19$

La ecuación de la recta normal es:  $y - 1 = -\frac{1}{10}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{1}{10}x + \frac{6}{5}$

## 47. Página 204

$r$  pasa por  $A = (1, f(1) = 4)$  y  $B = (3, f(3) = 8) \rightarrow$  Pendiente  $= \frac{8-4}{3-1} = 2$

$$f'(x) = 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow f(2) = 5$$

La ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a  $r$  es:  $y - 5 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x + 1$

## 48. Página 205

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} \rightarrow \frac{-2}{x^2} = -2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$f(1) = 2 \quad y \rightarrow 2 = -2 + 4 \rightarrow (1, 2)$  es un punto de la recta.

$f(-1) = 2 \quad y \rightarrow 2 \neq (-2) \cdot (-1) + 4 \rightarrow (-1, -2)$  no es un punto de la recta.

Por tanto,  $y$  puede ser tangente a la función  $f$  en el punto  $(1, 2)$ .

## 49. Página 205

$r$  pasa por  $A = (2, f(2) = 0)$  y  $B = (e + 1, f(e + 1) = 1) \rightarrow$  Pendiente  $= \frac{1-0}{e+1-2} = \frac{1}{e-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{e-1} \rightarrow x = e \rightarrow f(e) = \ln(e-1)$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \ln(e-1) = \frac{1}{e-1}(x-e) \rightarrow y = \frac{x}{e-1} - \frac{e}{e-1} + \ln(e-1)$$

## 50. Página 205

a)  $f'(x) = 2x - 2$

Si la recta tangente es paralela a la recta dada, entonces:

$$f'(x) = 2x - 2 = 4 \rightarrow x = 3 \qquad f(3) = 3 \rightarrow P = (3, 3)$$

Así, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 3 = 4(x - 3) \rightarrow y = 4x - 9$$

b) Resolvemos el sistema formado por la parábola y la recta:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 4x - 9 \end{cases} \rightarrow x^2 - 2x = 4x - 9 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = 3$$

Es decir, únicamente se cortan en un punto.

## 51. Página 205

$$f'(x) = 2x + b \rightarrow f'(1) = 2 + b$$

La bisectriz del primer cuadrante es la recta  $y = x$ .

Si la recta tangente es paralela a ella, entonces:  $2 + b = 1 \rightarrow b = -1$

Así, la ecuación de la función es de la forma:  $y = x^2 - x + c$

Si pasa por el punto  $(1, 1)$ , tenemos que:  $1 = 1 - 1 + c \rightarrow c = 1$

Luego la ecuación de la parábola es:  $y = x^2 - x + 1$

## 52. Página 205

a) La recta tangente forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje de abscisas  $\rightarrow m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

Buscamos los puntos que verifican que  $f'(x) = 1$ :

$$2x - 2 = 1 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3 \cdot 2}{2} - 3 = -\frac{15}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y + \frac{15}{4} = x - \frac{3}{2} \rightarrow y = x - \frac{21}{4}$

b) La recta tangente es horizontal  $\rightarrow$  Buscamos los puntos que verifican  $f'(x) = 0$ :

$$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow f(1) = -4$$

La ecuación de la recta tangente es  $y = -4$ .

## 53. Página 205

La recta tangente es paralela a la recta  $y = 2x - 123 \rightarrow$  Buscamos los puntos que verifican  $f'(x) = 2$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow 3x^2 - 1 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

• Si  $x = 1 \rightarrow f(1) = 4$  y la ecuación de la recta tangente es:  $y - 4 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x + 2$

• Si  $x = -1 \rightarrow f(1) = 4$  y la ecuación de la recta tangente es:  $y - 4 = 2(x + 1) \rightarrow y = 2x + 6$

## 54. Página 205

Para que las rectas tangentes sean paralelas, debe ocurrir que  $f'(1) = f'(2)$ .

$$f'(x) = 3kx^2 - 2x + 7k \rightarrow \begin{cases} f'(1) = 3k - 2 + 7k \\ f'(2) = 12k - 4 + 7k \end{cases} \rightarrow 9k = 2 \rightarrow k = \frac{2}{9}$$

Sustituyendo este valor  $\rightarrow \begin{cases} f'(1) = \frac{2}{9} \\ f'(2) = \frac{2}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(1) = \frac{-155}{9} \\ f(2) = \frac{-154}{9} \end{cases}$

• Si  $x = 1$ , la ecuación de la recta tangente es:  $y + \frac{155}{9} = \frac{2}{9}(x - 1) \rightarrow y = \frac{2}{9}x - \frac{157}{9}$

• Si  $x = -1$ , la ecuación de la recta tangente es:  $y + \frac{154}{9} = \frac{2}{9}(x - 2) \rightarrow y = \frac{2}{9}x - \frac{158}{9}$

## 55. Página 205

$$f(3) = -9a + 11 \quad f'(x) = -2ax + 5 \rightarrow f'(3) = -6a + 5$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y + 9a - 11 = (-6a + 5)(x - 3) \rightarrow y = (-6a + 5)x + 9a - 4$

La recta pasa por el punto  $(5, 0) \rightarrow (-6a + 5)5 + 9a - 4 = 0 \rightarrow -21a = -21 \rightarrow a = 1$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es:  $y - 2 = -(x - 3) \rightarrow y = -x + 5$

La ecuación de la recta normal es:  $y - 2 = x - 3 \rightarrow y = x - 1$

## 56. Página 205

$$a) f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+m}}$$

Para que sea paralela a  $y = 2x - 3$  en  $x = 2 \rightarrow f'(2) = 2$

$$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{4+m}} = 2 \rightarrow 1 = 4 + m \rightarrow m = -3$$

El punto de tangencia es:  $f(2) = \sqrt{4-3} = 1 \rightarrow (2, 1)$

b) Si la recta tangente pasa por  $P(a, 5)$  y  $Q(1, 1) \rightarrow$  Pendiente  $= \frac{5-1}{a-1} = \frac{4}{a-1}$

Si  $f(x)$  pasa por  $P(a, 5) \rightarrow f(a) = \sqrt{a^2+m} = 5$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+m}} \rightarrow f'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2+m}} = \frac{4}{a-1} \quad \text{Sustituyendo el valor de } f(a) = 5 \text{ en } f'(a):$$

$$\frac{a}{5} = \frac{4}{a-1} \rightarrow a(a-1) = 4 \cdot 5 \rightarrow a^2 - a - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo ahora en  $f(a)$  los valores de  $a$ :

- Si  $a = 5 \rightarrow f(5) = \sqrt{5^2+m} = 5 \rightarrow 5^2 + m = 5^2 \rightarrow m = 0$
- Si  $a = -4 \rightarrow f(-4) = \sqrt{(-4)^2+m} = 5 \rightarrow (-4)^2 + m = 5^2 \rightarrow m = 9$

## 57. Página 205

$$f(2) = 3 \quad f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \rightarrow f'(2) = -2$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y - 3 = -2(x - 2) \rightarrow y = -2x + 7$

Los puntos de corte de la función con los ejes son:

- Con el eje Y:  $x = 0 \rightarrow y = 7$
- Con el eje X:  $y = 0 \rightarrow x = \frac{7}{2}$

Por tanto, el área del triángulo es:  $\frac{\frac{7}{2} \cdot 7}{2} = \frac{49}{4} \text{ u}^2$

## 58. Página 205

$$f(2) = \sqrt{2^2+5} = 3 \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \rightarrow f'(2) = \frac{2}{3}$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2) \rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

Los puntos de corte de la función con los ejes son:

- Con el eje Y:  $x = 0 \rightarrow y = \frac{5}{3}$
- Con el eje X:  $y = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$

Por tanto, el área del triángulo es:  $\frac{\left(0 - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) \cdot \frac{5}{3}}{2} = \frac{25}{12} \text{ u}^2$

## 59. Página 205

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 + \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3 + \ln 1 = 3$$

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{4}{2} = 2$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y - 3 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y = 2x + \frac{6 - \pi}{2}$

Puntos de corte:

• Con el eje Y:  $x = 0 \rightarrow y = \frac{6 - \pi}{2}$       • Con el eje X:  $y = 0 \rightarrow x = \frac{\pi - 6}{4}$

$$\text{Área} = \frac{\left(0 - \frac{\pi - 6}{4}\right) \cdot \left(\frac{6 - \pi}{2}\right)}{2} = \frac{(6 - \pi)^2}{16} \text{ u}^2$$

## 60. Página 205

$$f(-2) = 3 \quad f(5) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+4}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(-2) = -4 \\ f'(5) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Así, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$x = -2 \rightarrow y - 3 = -4(x + 2) \rightarrow y = -4x - 5$$

$$x = 5 \rightarrow y = \frac{1}{6}(x - 5) \rightarrow y = \frac{1}{6}x - \frac{5}{6}$$

Puntos de corte:

• Entre las dos rectas:  $-4x - 5 = \frac{1}{6}x - \frac{5}{6} \rightarrow \frac{25}{6}x = \frac{-25}{6} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

• La primera recta con el eje X:  $y = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{4}$

• La segunda recta con el eje X:  $y = 0 \rightarrow x = 5$

$$\text{Área} = \frac{\left(5 - \left(-\frac{5}{4}\right)\right) \cdot (0 - (-1))}{2} = \frac{25}{8} \text{ u}^2$$

## 61. Página 205

La función corta al eje de abscisas  $\rightarrow y = 0 \rightarrow f(x) = (x + 1) \cdot e^x = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ e^x \neq 0 \quad \forall x \end{cases} \rightarrow x = -1$

Así, la función corta al eje de abscisas en  $P(-1, 0)$ .

$$f'(x) = e^x + (x + 1) \cdot e^x = e^x \cdot (2 + x) \rightarrow f'(-1) = \frac{1}{e}$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y = \frac{1}{e}(x + 1)$



La ecuación de la recta normal es:  $y = -e \cdot (x+1) \rightarrow y = -ex - e$

Corte de la recta tangente con el eje Y:  $x=0 \rightarrow y = \frac{1}{e}$

Corte de la recta normal con el eje Y:  $x=0 \rightarrow y = -e$

$$\text{Área} = \frac{\left(\frac{1}{e} - (-e)\right) \cdot (0 - (-1))}{2} = \frac{1+e^2}{2e} u^2$$

### 62. Página 205

$f(x)$  y  $g(x)$  pasan por  $P(-1, 2) \rightarrow f(-1) = 1 - a + b = 2 \quad g(-1) = c = 2$

Tienen la misma recta tangente en  $P \rightarrow f'(-1) = g'(-1)$

$f'(x) = 2x + a \rightarrow f'(-1) = -2 + a \quad g'(x) = -2 \cdot e^{-(x+1)} \rightarrow g'(-1) = -2$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} -2 + a = -2 \\ 1 - a + b = 2 \rightarrow a = 0, b = 1, c = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

### 63. Página 205

$x = 3 \rightarrow 9 + 16y^2 - 16 = 0 \rightarrow 16y^2 = 7 \rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \rightarrow$  Se considera el punto  $\left(3, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ .

$2x + 32yy' = 0 \rightarrow 32yy' = -2x \rightarrow y' = -\frac{x}{16y}$

$$y' \left(3, \frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{3}{16 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3}{4\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{28}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{3\sqrt{7}}{28}(x-3) \rightarrow y = \frac{3\sqrt{7}}{28}x + \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

### 64. Página 205

$x = 4 \rightarrow 64 - 9y^2 - 36 = 0 \rightarrow 9y^2 = 28 \rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{7}}{3} \rightarrow$  Se considera el punto  $\left(4, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$ .

$8x - 18yy' = 0 \rightarrow -18yy' = -8x \rightarrow y' = \frac{4x}{9y}$

$$y' \left(4, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{16}{9 \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3}} = \frac{8}{3\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{21}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{8\sqrt{7}}{21}(x-4) \rightarrow y = \frac{8\sqrt{7}}{21}x - \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

## 65. Página 205

La circunferencia en cuestión tiene ecuación:  $(x-0)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{5})^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 5$

$$y^2 = 5 - x^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{5-x^2}, \text{ donde: } \begin{cases} f(x) = \sqrt{5-x^2} \\ g(x) = -\sqrt{5-x^2} \end{cases}$$

En primer lugar, para  $f(x)$ :

$$f(1) = 2 \quad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} \rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{La ecuación de la recta tangente es: } y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

En segundo lugar, para  $g(x)$ :

$$g(1) = -2 \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} \rightarrow g'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{La ecuación de la recta tangente es: } y + 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

Calculamos el punto de corte de las dos rectas tangentes:

$$-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \rightarrow x = 5 \rightarrow (5, 0)$$

Calculamos el punto de corte de las rectas tangentes a  $f(x)$  y  $g(x)$  con el eje de ordenadas:

$$x = 0 \rightarrow y = 0 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow \left(0, \frac{5}{2}\right) \quad x = 0 \rightarrow y = 0 - \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{5}{2}\right)$$

$$A = \frac{\left(\frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} \text{ u}^2$$

## 66. Página 205

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

- La pendiente de la recta tangente es nula  $\rightarrow f'(0) = c = 0 \rightarrow c = 0$

$$\text{La función pasa por el punto } (0, 2) \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow d = 2$$

- La pendiente de esta recta tangente es 1  $\rightarrow f'(1) = 1 \rightarrow 3a + 2b = 1$

$$x - y - 2 = 0 \xrightarrow{x=1} y = -1 \rightarrow \text{La función pasa por el punto } (1, -1) \rightarrow f(1) = -1 \rightarrow a + b + 2 = -1 \rightarrow a + b = -3$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones anteriores:

$$\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ a + b = -3 \end{cases} \rightarrow a = 7, b = -10 \rightarrow f(x) = 7x^3 - 10x^2 + 2$$

## 67. Página 205

$$\text{a) } f'(1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = f'(1^-)$$

$$\text{b) } f'(1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \quad f'(1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{h}} = -\infty$$

No existe la derivada por la izquierda porque la raíz cuadrada no está definida para valores negativos.

## 68. Página 205

$$a) f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 3 \\ x-4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

La función es continua en  $x = 3$ , porque  $f(3^-) = f(3^+) = f(3) = -1$ .

$$f'(3^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h-1+1}{h} = 1$$

$$f'(3^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(3+h)+2+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, entonces la función no es derivable.

$$b) f(x) = \begin{cases} x+9-x^2 & \text{si } x < -3 \\ x-9+x^2 & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ x+9-x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función es continua en  $x = 3$ :  $f(3^-) = f(3^+) = f(3) = 3$

$$f'(3^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3+h+9-(3+h)^2-3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2-5h}{h} = -5$$

$$f'(3^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h+3-9+(h+3)^2-3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2+7h}{h} = 7$$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, entonces la función no es derivable.

## 69. Página 205

$$f(x) = \begin{cases} 4-x-x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ 3x+4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$f'(-2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3 \cdot (-2+h) + 4 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h-4}{h} = -\infty \rightarrow \text{No existe.}$$

$$f'(-2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4 - (-2+h) - (-2+h)^2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h-h^2}{h} = 3$$

## 70. Página 205

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$f'(1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1+h}{1+h-1} - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-4h}{h^2} = +\infty = f'(1^-)$$

No existen las derivadas laterales.

## 71. Página 206

a) Si  $x > 0$ :  $f(x) = \cos x \rightarrow$  Función trigonométrica continua y derivable en  $(0, +\infty)$ .

Si  $x < 0$ :  $f(x) = -x^2 + 1 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(-\infty, 0)$ .

Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en  $x = 0$ :

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1 \quad f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 1) = 1 \quad f(0) = 1$$

Por tanto, la función es continua en  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

Las derivadas laterales, existen y son iguales, entonces  $f(x)$  derivable en  $\mathbb{R}$ .

b) Si  $x > 0$ :  $f(x) = -x^3 + 2x + 1 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(0, +\infty)$ .

Si  $x < 0$ :  $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow$  Función trigonométrica continua y derivable en  $(-\infty, 0)$ .

Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en  $x = 0$ :

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^3 + 2x + 1) = 1 \quad f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 \cdot \operatorname{sen} x + 1) = 1 \quad f(0) = 1$$

Por tanto, la función es continua en  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cdot \cos x & \text{si } x < 0 \\ -3x^2 + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 2 \\ f'(0^+) = 2 \end{cases}$$

Las derivadas laterales, existen y son iguales, entonces  $f(x)$  derivable en  $\mathbb{R}$ .

c) Si  $x > 2$ :  $f(x) = 7 - 2^x \rightarrow$  Función exponencial continua y derivable en  $(2, +\infty)$ .

Si  $x < 2$ :  $f(x) = \frac{x+3}{2x-5} \rightarrow$  Función racional continua y derivable en  $(-\infty, 2)$ .

Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en  $x = 2$ :

$$f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (7 - 2^x) = 3 \quad f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{2x-5} = -5$$

Así, la función no es continua en  $x = 2$  y, por tanto, tampoco será derivable en ese punto.

Es decir, la función es continua y derivable en  $\mathbb{R} - \{2\}$ .

## 72. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 1 - 3\sqrt{2x - 1} & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad \operatorname{Dom}\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2}\right) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad \operatorname{Dom}(1 - 3\sqrt{2x - 1}) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

• Si  $x \in (-2, -1) \cup (-1, 1) \rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2} \rightarrow$  Función racional continua y derivable.

• Si  $x \in (1, 5) \rightarrow f(x) = 1 - 3\sqrt{2x - 1} \rightarrow$  Función radical continua y derivable.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en  $x = -1$ :

$$f(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{-(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-(x+3)}{x+1} = +\infty \quad f(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+3)}{x+1} = -\infty$$

Así, la función no es continua y, por tanto, no es derivable en  $x = -1$ .

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en  $x = 1$ :

$$f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - 3\sqrt{2x-1}) = -2 \quad f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+3)}{x+1} = -2 \quad f(1) = -2$$

Así, la función es continua en  $x = 1$ .

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x \in [-2, -1) \cup (-1, 1) \\ \frac{-3}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x \in (1, 5] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = \frac{1}{2} \\ f'(1^+) = -3 \end{cases} \rightarrow \text{La función no es derivable en } x = 1.$$

### 73. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5x + 6 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 - \frac{1}{x} & \text{si } -1 < x < 2 \\ \frac{5}{4} + 2^{-x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Si  $x < -1 \rightarrow f(x) = 2x^2 + 5x + 6 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(-\infty, -1)$ .
- Si  $-1 < x < 0$  y  $0 < x < 2 \rightarrow f(x) = 2 - \frac{1}{x} \rightarrow$  Función continua y derivable en  $(-1, 0) \cup (0, 2)$ .
- Si  $x > 2 \rightarrow f(x) = \frac{5}{4} + 2^{-x} \rightarrow$  Función exponencial continua y derivable en  $(2, +\infty)$ .
- Si  $x = -1$ :

$$f(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 3 \quad f(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^2 + 5x + 6) = 3 \quad f(-1) = 3$$

Así, la función es continua en  $x = -1$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 5 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } -1 < x < 0 \text{ o } 0 < x < 2 \\ \frac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(-1^-) = 1 \\ f'(-1^+) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{La función es derivable en } x = -1.$$

- Si  $x = 0$ :

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \quad f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Así, la función no es continua en  $x = 0$ ; por tanto, no es derivable en este punto.

- Si  $x = 2$ :

$$f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{5}{4} + 2^{-x}\right) = \frac{3}{2} \quad f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2} \quad f(2) = \frac{3}{2}$$

Así, la función es continua en  $x = 2$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 5 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } -1 < x < 0 \text{ o } 0 < x < 2 \\ \frac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(2^-) = \frac{1}{4} \\ f'(2^+) = \frac{-\ln 2}{4} \end{cases} \rightarrow \text{La función no es derivable en } x = 2.$$

En resumen, la función es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$  y derivable en  $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ .

## 74. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} 7-2x+6 & \text{si } x \geq 3 \\ 7+2x-6 & \text{si } x < 3 \end{cases} = \begin{cases} 13-2x & \text{si } x \geq 3 \\ 1+2x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

- Si  $x < 3$ :  $f(x) = 1+2x \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(-\infty, 3)$
- Si  $x > 3$ :  $f(x) = 13-2x \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(3, +\infty)$
- Si  $x = 3$ :

$$f(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1+2x) = 7 \quad f(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (13-2x) = 7 \quad f(3) = 7$$

Por tanto, la función es continua en  $x = 3$ .

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x > 3 \\ 2 & \text{si } x < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(3^+) = -2 \\ f'(3^-) = 2 \end{cases}$$

Por tanto, la función no es derivable en  $x = 3$ .

## 75. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} 2x-4+x & \text{si } x \geq 2 \\ -2x+4+x & \text{si } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 3x-4 & \text{si } x \geq 2 \\ -x+4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

- Si  $x < 2$ :  $f(x) = -x+4 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(-\infty, 2)$
- Si  $x > 2$ :  $f(x) = 3x-4 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(2, +\infty)$
- Si  $x = 2$ :

$$f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+4) = 2 \quad f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x-4) = 2 \quad f(2) = 2$$

Entonces la función es continua en  $x = 2$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x > 2 \\ -1 & \text{si } x < 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(2^+) = 3 \\ f'(2^-) = -1 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen pero son diferentes, entonces la función no es derivable en  $x = 2$ .

## 76. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} x^3+x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^3+x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Si  $x < 0$ :  $f(x) = -x^3+x+1 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(-\infty, 0)$
- Si  $x > 0$ :  $f(x) = x^3+x+1 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(0, +\infty)$
- Si  $x = 0$ :

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^3+x+1) = 1 \quad f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3+x+1) = 1 \quad f(0) = 1$$

Entonces la función es continua en  $x = 0$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & \text{si } x > 0 \\ -3x^2+1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^+) = 1 \\ f'(0^-) = 1 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces la función es derivable en  $x = 0$ .

- Por otra parte:

$$f(x) = |x|^3 + |x| + 1 = \begin{cases} -x^3 - x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^3 + x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(0^+) = f(0^-) = f(0) \rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \\ -3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^+) = 1 \\ f'(0^-) = -1 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen pero son diferentes, luego la función no es derivable en  $x = 0$ .

### 77. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable, en primer lugar debe ser continua.

La función es continua en  $x = 0$  si los límites laterales son iguales y coinciden con  $f(0) = \cos 0 = 1$ .

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + a) = a \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 0 \\ f'(0^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, } f(x) \text{ es derivable en } x = 0 \text{ si } a = 1.$$

### 78. Página 206

a) • Si  $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -3) \rightarrow f(x) = \frac{x}{x+4} \rightarrow$  Función racional continua y derivable.

• Si  $x \in (-3, +\infty) \rightarrow f(x) = x^2 + ax \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable.

• Si  $x = -4$ :

No es continua ni derivable en  $x = -4$ , ya que no pertenece al dominio.

• Si  $x = -3$ :

$$\left. \begin{aligned} f(-3^-) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x}{x+4} = -3 \\ f(-3^+) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} (x^2 + ax) = 9 - 3a \end{aligned} \right\} \rightarrow f(-3^-) = f(-3^+) = f(3) \rightarrow 9 - 3a = -3 \rightarrow a = 4$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x > -3 \\ \frac{4}{(x+4)^2} & \text{si } x < -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(-3^+) = -2 \\ f'(-3^-) = 4 \end{cases} \rightarrow f'(3^+) \neq f'(3^-)$$

Entonces no existe ningún valor de  $a$  para el cual la función es derivable en  $x = -3$ .

b) • Si  $x \in (-\infty, 1) \rightarrow f(x) = 2x + e^{1-x} \rightarrow$  Función exponencial continua y derivable.

• Si  $x \in (1, +\infty) \rightarrow f(x) = 1 + \sqrt{x+m} \rightarrow$  Función radical continua y derivable  $\forall m \geq -x$ .

• Si  $x = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + e^{1-x}) = 3 \\ f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + \sqrt{x+m}) = 1 + \sqrt{1+m} \end{aligned} \right\} \rightarrow f(1^-) = f(1^+) \rightarrow 3 = 1 + \sqrt{1+m} \rightarrow m = 3$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - e^{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+3}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1^+) = 1 \\ f'(1^-) = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow f'(1^+) \neq f'(1^-)$$

Entonces no existe ningún valor de  $a$  para el cual la función es derivable en  $x = 1$ .

79. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25-x^2} & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en  $x = 4$  ha de ser continua en este punto:

$$\left. \begin{aligned} f(4^-) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{25-x^2} = 3 \\ f(4^+) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 + mx + n) = 16 + 4m + n \end{aligned} \right\} \rightarrow f(4^-) = f(4^+) = f(4) \rightarrow 4m + n = -13$$

Para que la función sea derivable en  $x = 4$ , las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} & \text{si } -5 < x < 4 \\ 2x + m & \text{si } x > 4 \end{cases} \rightarrow \left. \begin{aligned} f(4^-) &= -\frac{4}{3} \\ f(4^+) &= 8 + m \end{aligned} \right\} \rightarrow 8 + m = -\frac{4}{3} \rightarrow m = -\frac{28}{3}$$

$$\text{Así: } 16 + 4 \cdot \left(-\frac{28}{3}\right) + n = 3 \rightarrow n = 3 + \frac{112}{3} - 16 \rightarrow n = \frac{73}{3}$$

80. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} 1 + a\sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) • Si  $x \in (0, +\infty) \rightarrow f(x) = 1 + a\sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1) \rightarrow$  Producto de funciones continuas y derivables en  $(0, +\infty)$ .

• Si  $x \in (-\infty, 0) \rightarrow f(x) = (x-1)^2 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(-\infty, 0)$ .

• Si  $x = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)^2 = 1 \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + a\sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1)) = 1 + a \cdot 0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$b) f'(x) = \begin{cases} \frac{a \cdot (\ln(x+1) + 2)}{2 \cdot \sqrt{x+1}} & \text{si } x > 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Para que la función sea derivable: } f'(0^+) = f'(0^-) \rightarrow \begin{cases} f'(0^+) = \frac{a \cdot (\ln(1) + 2)}{2\sqrt{1}} = \frac{2a}{2} \\ f'(0^-) = -2 \end{cases} \rightarrow a = -2$$



## 81. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + \operatorname{sen} x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en  $x = 0$  ha de ser continua en este punto:

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(e + \operatorname{sen} x) = 1 \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + ax + b) = b \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow b = 1$$

Para que la función sea derivable en  $x = 0$ , las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{e + \operatorname{sen} x} & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \frac{1}{e} \\ f'(0^+) &= a \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \frac{1}{e}$$

## 82. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x < 0 \\ a^2 - \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si  $x < 0$ :  $f(x) = ax^2 + bx + 1 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(-\infty, 0)$ .
- Si  $x > 0$ :  $f(x) = a^2 - \operatorname{sen} x \rightarrow$  Función trigonométrica continua y derivable en  $(0, +\infty)$ .
- Si  $x = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + bx + 1) = 1 \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (a^2 - \operatorname{sen} x) = a^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) = 1 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 0 \\ -\cos x & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \left. \begin{aligned} f'(0^-) &= b \\ f'(0^+) &= -\cos 0 = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow b = -1$$

## 83. Página 206

- a) • Si  $x < \pi$ :  $f(x) = e^{a(x-\pi)} \rightarrow$  Función exponencial continua y derivable en  $(-\infty, \pi)$ .
- Si  $x > \pi$ :  $f(x) = 2a + b \cdot \operatorname{sen}(x - \pi) \rightarrow$  Función trigonométrica continua y derivable en  $(\pi, +\infty)$ .
- Si  $x = \pi$ :

$$\left. \begin{aligned} f(\pi^-) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} e^{a(x-\pi)} = 1 \\ f(\pi^+) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} (2a + b \cdot \operatorname{sen}(x - \pi)) = 2a \end{aligned} \right\} \rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{x-\pi}{2}} & \text{si } x < \pi \\ b \cdot \cos(x - \pi) & \text{si } x > \pi \end{cases} \rightarrow \left. \begin{aligned} f'(\pi^-) &= \frac{1}{2} \\ f'(\pi^+) &= b \cdot \cos 0 = b \end{aligned} \right\} \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

- b) • Si  $x < -1$ :  $f(x) = (x+b)^2 \rightarrow$  Función polinómica continua y derivable en  $(-\infty, -1)$ .
- Si  $x > -1$ :  $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x+2}} \rightarrow$  Función radical continua y derivable en  $(-1, +\infty)$ .

- Si  $x = -1$ :

$$\left. \begin{aligned} f(-1^-) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+b)^2 = 1-2b+b^2 \\ f(-1^+) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{ax}{\sqrt{x+2}} = -a \end{aligned} \right\} \rightarrow -a = 1-2b+b^2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2b & \text{si } x < -1 \\ \frac{a(x+4)}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } x > -1 \end{cases} \rightarrow \left. \begin{aligned} f'(-1^-) &= -2+2b \\ f'(-1^+) &= \frac{3a}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{3a}{2} = -2+2b$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} -a = 1-2b+b^2 \\ 3a = -4+4b \end{cases} \rightarrow a = -\frac{16}{9} \text{ y } b = -\frac{1}{3} \text{ o } a = 0 \text{ y } b = 1$$

#### 84. Página 206

$$a) f(x) = \begin{cases} 2e^x + x + a & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + b(x+1) & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x^4 - 3a & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Todas las ramas son continuas y derivables en el dominio en el que se las ha definido.

- Si  $x = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (2e^x + x + a) = 2+a \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + b(x+1)) = b \end{aligned} \right\} \rightarrow 2+a = b$$

- Si  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} f(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + b \cdot (x+1)) = 4+3b \\ f(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^4 - 3a) = 16-3a \end{aligned} \right\} \rightarrow 16-3a = 4+3b$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2+a = b \\ 16-3a = 4+3b \end{cases} \rightarrow a = 1, b = 3$$

- Comprobamos la derivabilidad:  $f'(x) = \begin{cases} 2e^x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 4x^3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow \left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 3 \\ f'(0^+) &= 3 \end{aligned} \right\} \text{ y } \left. \begin{aligned} f'(2^-) &= 7 \\ f'(2^+) &= 32 \end{aligned} \right\}$

Entonces  $f$  es derivable en  $x = 0$ , pero no es derivable en  $x = 2$ .

$$b) f(x) = \begin{cases} -x^3 + 7x + c & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2 + 3x + 11 & \text{si } -2 < x \leq \frac{3}{2} \\ 18\sqrt{2x+1} + b & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Todas las ramas son continuas y derivables en el dominio en el que se las ha definido.

- Si  $x = -2$ :

$$\left. \begin{aligned} f(-2^-) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (-x^3 + 7x + c) = c-6 \\ f(-2^+) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (ax^2 + 3x + 11) = 4a+5 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4a - c + 11 = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 7 & \text{si } x < -2 \\ 2ax + 3 & \text{si } -2 < x < \frac{3}{2} \\ \frac{18}{\sqrt{2x+1}} & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(-2^-) = -5 \\ f'(-2^+) = 3 - 4a \end{array} \right\} \rightarrow -5 = 3 - 4a \rightarrow a = 2$$

Así,  $8 + 11 = c \rightarrow c = 19$

- Si  $x = \frac{3}{2}$  (sustituyendo los valores de  $a$  y  $c$ ):

$$\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{3^-}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{3^-}{2}} (2x^2 + 3x + 11) = 20 \\ f\left(\frac{3^+}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{3^+}{2}} (18\sqrt{2x+1} + b) = 36 + b \end{array} \right\} \rightarrow 20 = 36 + b \rightarrow b = -16$$

- Comprobamos que es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 7 & \text{si } x < -2 \\ 4x + 3 & \text{si } -2 < x < \frac{3}{2} \\ \frac{18}{\sqrt{2x+1}} & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f'\left(\frac{3^-}{2}\right) = 9 \\ f'\left(\frac{3^+}{2}\right) = 9 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Es derivable en } x = \frac{3}{2}.$$

### 85. Página 206

- a) Cada rama es continua y derivable en el dominio en el que se las ha definido. Comprobamos en  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + ab) = ab \\ f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2(x+2) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow ab = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{(x+2) \cdot \ln 2} = \frac{1}{x \cdot \ln 2 + \ln 4} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(0^-) = a \\ f'(0^+) = \frac{1}{\ln 4} \end{array} \right\} \rightarrow a = \frac{1}{\ln 4} \rightarrow b = \ln 4$$

- b)  $f(3) = \log_2 5$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2 + \ln 4} \rightarrow f'(3) = \frac{1}{\ln 8 + \ln 4}$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y - \log_2 5 = \frac{1}{\ln 8 + \ln 4} \cdot (x - 3)$

La recta corta con los ejes en:

- Eje Y:  $x = 0 \rightarrow y = \frac{-3}{\ln 8 + \ln 4} + \log_2 5 \approx 1,456$
- Eje X:  $y = 0 \rightarrow x = -\log_2 5 \cdot (\ln 8 + \ln 4) + 3 \approx -5,047$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{[0 - (-5,047)] \cdot 1,456}{2} \approx 3,674 \text{ u}^2$$

## 86. Página 206

$$a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)+3-(2x+3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$$

$$b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 9 - (x^2 - 9)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = 2x$$

$$c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2(x+h)^3 - (1 - 2x^3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h \cdot (3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = -6x^2$$

$$d) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - 7(x+h)^2 - (x^3 - 7x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (3x^2 + 3xh + h^2 - 7h - 14x)}{h} = 3x^2 - 14x$$

## 87. Página 206

$$a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5}{x+h} + \frac{5}{x} = -5 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{5}{x^2}$$

$$b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 2 \cdot (x+h) - (x^2 + 2x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + 2h + h^2}{h} = 2x + 2$$

$$d) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ahx + ah^2}{h} = 2ax$$

## 88. Página 206

$$a) f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2 \qquad f'''(x) = 24x$$

$$f^{IV}(x) = 24 \qquad f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \geq 5$$

$$b) f'(x) = f^{4k+1}(x) = \cos x \qquad f''(x) = f^{4k+2}(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f'''(x) = f^{4k+3}(x) = -\cos x$$

$$f^{IV}(x) = f^{4k}(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{Para } k \in \mathbb{Z}$$

$$c) f'(x) = f^{4k+1}(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''(x) = f^{4k+2}(x) = -\cos x \qquad f'''(x) = f^{4k+3}(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f^{IV}(x) = f^{4k}(x) = \cos x \qquad \text{Para } k \in \mathbb{Z}$$

$$d) f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = \frac{-1}{x^2} \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f^{IV}(x) = \frac{-6}{x^4} \qquad f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{x^k} \qquad \text{Para } k \in \mathbb{Z}$$

## 89. Página 207

$$f'(x) = -g'(x) \cdot \operatorname{sen}(g(x)) \cdot 2^{\cos(g(x))} \cdot \ln 2$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -g'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot 2^{\cos\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)} \cdot \ln 2 = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 2^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \ln 2 = 2 \cdot 2^0 \cdot \ln 2 = 2 \cdot \ln 2$$

## 90. Página 207

$$\text{a) } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} \quad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}} \quad f^{IV}(x) = \frac{-15}{16\sqrt{x^7}}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{2^n \sqrt{x^{2n-1}}} \quad \forall n \geq 4$$

$$\text{b) } f'(x) = 2\cos(2x) \quad f''(x) = -4\text{sen}(2x) \quad f'''(x) = -8\cos(2x) \quad f^{IV}(x) = 16\text{sen}(2x)$$

$$\begin{cases} f^{(4k)}(x) = 2^{4k} \cdot \text{sen}(2x) \\ f^{(4k+1)}(x) = 2^{4k+1} \cdot \cos(2x) \\ f^{(4k+2)}(x) = -2^{4k+2} \cdot \text{sen}(2x) \\ f^{(4k+3)}(x) = -2^{4k+3} \cdot \cos(2x) \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{c) } f'(x) = -e^{-x} \quad f''(x) = e^{-x} \quad f'''(x) = -e^{-x} \quad f^{IV}(x) = e^{-x}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$$

$$\text{d) } f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 \quad f''(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^2 \quad f'''(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^3 \quad f^{IV}(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^4$$

$$f^{(n)}(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^n$$

$$\text{e) } f'(x) = e^x + x \cdot e^x \quad f''(x) = (2+x) \cdot e^x \quad f'''(x) = (3+x) \cdot e^x \quad f^{IV}(x) = (4+x) \cdot e^x$$

$$f^{(n)}(x) = (n+x) e^x$$

$$\text{f) } f'(x) = -\text{sen}(2x) \quad f''(x) = -2\cos(2x) \quad f'''(x) = 4\text{sen}(2x) \quad f^{IV}(x) = 8\cos(2x)$$

$$\begin{cases} f^{(4k)}(x) = 2^{4k-1} \cdot \cos(2x) \\ f^{(4k+1)}(x) = -2^{4k} \cdot \text{sen}(2x) \\ f^{(4k+2)}(x) = -2^{4k+1} \cdot \cos(2x) \\ f^{(4k+3)}(x) = 2^{4k+2} \cdot \text{sen}(2x) \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

## 91. Página 207

$$\text{a) } y' = 2x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \quad \text{b) } y' = 4\cos x - 4\cos(4x) \quad \text{c) } y' = -\frac{2}{x^3} + 4x + \frac{3}{x^2}$$

## 92. Página 207

$$\text{a) } y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \quad \text{b) } y' = \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \quad \text{c) } y' = 2\cos x \cdot \text{sen } x - 2\cos x \cdot \text{sen } x = 0$$

## 93. Página 207

$$\text{a) } y' = \frac{7\sqrt[3]{x^4}}{3} \quad \text{c) } y' = 2x^3(4\cos x - x \text{sen } x)$$

$$\text{b) } y' = x(x+2)e^{x+2} \quad \text{d) } y' = \frac{2\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{2\sqrt{\cos x}}$$

## 94. Página 207

a)  $y' = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$

b)  $y' = \frac{6}{x^3} + 1$

c)  $y' = (3e)^{-x} (1 - x(1 + \ln 3))$

d)  $y' = e^{-x} (x^2 - x - 1)$

e)  $y' = \frac{-1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

f)  $y' = \frac{-4x-9}{(x-3)^4}$

## 95. Página 207

a)  $y' = \frac{4}{x^2+1}$

b)  $y' = 2 \cos x + \sec^2 x$

c)  $y' = 1 + 2x \cdot \operatorname{arctg} x$

d)  $y' = 4 \cos(2x)$

e)  $y' = 5 \operatorname{tg}(5x+2) \sec(5x+2)$

f)  $y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

g)  $y' = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}$

## 96. Página 207

a)  $y' = \frac{4x-9}{x(x-3)}$

b)  $y' = \frac{x}{x^2-2}$

c)  $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

d)  $y' = \frac{15x^2}{(5x^3-1) \cdot \ln 2}$

## 97. Página 207

a)  $y' = \frac{4}{\operatorname{sen} 4x}$

b)  $y' = -6x \cdot \operatorname{tg}(x^2-1)$

c)  $y' = \frac{20x}{(x^4-25) \cdot \ln 2}$

d)  $y' = \frac{1}{2x-2x^2}$

e)  $y' = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x - 2x \operatorname{sen}(2x)}{2x \cdot \ln 10 \cdot (\operatorname{sen}^2 x + 1)}$

## 98. Página 207

a)  $y' = 4^x \ln 4$

b)  $y' = -\frac{16x}{(x^2-4)^2}$

c)  $y' = \frac{2x^2-2x+1}{(x-1)^2 x^2}$

d)  $y' = \frac{7}{2\sqrt{x}} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e)  $y' = e^x (x+1)$

## 99. Página 207

a)  $y' = \frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2)^2}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{25x}}$

b)  $y' = \frac{-1}{(x-3)^2}$

c)  $y' = \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2}$

d)  $y' = -15x^2 + 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$

e)  $y' = \frac{1}{x \ln 2} + 2^x \ln 2$

## 100. Página 207

a)  $y' = \frac{2xe^x - (x^2+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x^2+2x-1}{e^x}$

b)  $y' = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

c)  $y' = \frac{-\sqrt{x-1}}{(x-1)^2 \sqrt{x+1}}$

d)  $y' = \frac{2(x+2)(x+1) - (x+2)^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

e)  $y' = \frac{-2x^3+4x}{e^{x^2}}$

f)  $y' = \frac{-4x^3-3x^2-2}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x^3-1}}(x^3-1)^2}$

## 101. Página 207

a)  $y' = 3^{x^2+4} \ln 3 \cdot 2x$

b)  $y' = 15x^4(x^5-2)^2$

c)  $y' = \frac{1}{3}(x^3-2x)^{\frac{2}{3}} \cdot (3x^2-2) = \frac{3x^2-2}{3\sqrt[3]{(x^3-2x)^2}}$

d)  $y' = -10xe^{-x^2}$

e)  $y' = \frac{-5x-6}{2x^4\sqrt{x+1}}$

## 102. Página 207

a)  $y' = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

b)  $y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

c)  $y' = 2xe^{x^2-7}$

d)  $y' = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

e)  $y' = 2^{\operatorname{sen} x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$

## 103. Página 208

a)  $y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

b)  $y' = -(2x+5) \cdot \operatorname{sen}(x^2+5x+5)$

c)  $y' = \frac{1}{x^2 \cdot \operatorname{tg} x} \rightarrow y' = -\frac{x+x \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x}{x^3 \operatorname{tg}^2 x}$

d)  $y' = \frac{5}{\sqrt{1-(5x+1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{-25x^2-10x}}$

## 104. Página 208

$$a) y' = 12 \cdot \frac{1}{2} (3x^2 + x)^{\frac{1}{2}} \cdot (6x + 1) = \frac{36x + 6}{\sqrt{3x^2 + x}}$$

$$b) y' = \frac{\cos x^2 \cdot 2x}{\operatorname{sen} x^2} = 2x \operatorname{cotg} x^2$$

$$c) y' = (8x - 5) \cdot 3^x + (4x^2 - 5x + 1) \cdot 3^x \cdot \ln 3$$

## 105. Página 208

$$a) y' = 4 \operatorname{tg}(2x + 3) (1 + \operatorname{tg}^2(2x + 3))$$

$$b) y' = \frac{3x^2}{1 + (x^3 + 6)^2}$$

$$c) y' = \frac{1}{2} (\ln(3x - 5))^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{3x - 5} = \frac{3}{2(3x - 5)\sqrt{\ln(3x - 5)}}$$

## 106. Página 208

$$a) y' = \frac{1}{4} (5x^3 + 1)^{\frac{3}{4}} \cdot 15x^2 = \frac{15x^2}{4\sqrt[4]{(5x^3 + 1)^3}}$$

$$b) y' = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$c) y' = \frac{2}{3} (5x - 2)^{\frac{1}{3}} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x - 2}}$$

## 107. Página 208

$$a) y' = -\frac{4x}{x^4 + 4}$$

$$b) y' = \frac{\cos x}{2 \operatorname{sen} x}$$

$$c) y' = -4(\operatorname{tg}^2(\cos(2x)) + 1) \cdot \operatorname{sen}(2x) \cdot \operatorname{tg}(\cos(2x))$$

$$d) y' = -\frac{2x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{-4x^2 + 1}}$$

## 108. Página 208

$$a) y' = -2e^{\cos 2x} \cdot \operatorname{sen}^2 2x + 2 \cos 2x \cdot e^{\cos 2x}$$

$$b) y' = -10(\operatorname{tg}^2(-5x + 1) + 1) \cdot \operatorname{tg}(-5x + 1)$$

$$c) y' = -6(2x - 1)^2 \cdot \operatorname{sen}((2x - 1)^3)$$

$$d) y' = -6 \cos^2(2x - 1) \cdot \operatorname{sen}(2x - 1)$$

## 109. Página 208

$$a) y' = \frac{2x + e^x}{x^2 + e^x}$$

$$b) y' = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

$$c) y' = 2 - \frac{1}{x}$$

$$d) y' = \frac{2x^2 + 9x - 3}{3x(x^2 + 2x - 3)}$$

$$e) y' = -\frac{x \operatorname{sen} x + \cos x + 1}{x + x \cos x}$$



## 110. Página 208

a)  $y' = \frac{4x^2 - 2}{\sqrt{1-x^2}}$

b)  $y' = -\frac{\sqrt[3]{\cot g x} \cdot \operatorname{cosec} x \cdot \sec x}{3}$

c)  $y' = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cdot (\cot g^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)$

d)  $y' = -2 \operatorname{sen}(2-x) \cos(2-x) = -\operatorname{sen}(4-2x)$

## 111. Página 208

a)  $y' = \frac{-x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + x \cos x}{e^x}$

b)  $y' = -\frac{1}{x^2 + 1}$

c)  $y' = \frac{2^x \ln 2}{2^x - 1}$

d)  $y' = -\frac{x \operatorname{sen} x + 2 \cos x}{x^3}$

e)  $y' = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

## 112. Página 208

a)  $y' = \frac{e^x + 1}{2\sqrt{x+e^x}}$

b)  $y' = \frac{5^{-x}(25^x - 1) \ln 5}{2}$

c)  $y' = x e^{-x} (2-x)$

d)  $y' = -2x \cdot e^{1-x^2}$

e)  $y' = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cdot \sqrt{\sec^3 x}$

## 113. Página 208

a)  $y' = 2(e^x + 1) \cdot \operatorname{cosec}(2x + 2e^x)$

b)  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arc} \cos(-x)}$

c)  $y' = \sec^2 x \cdot (2 \operatorname{tg} x + \sec^2(\operatorname{tg} x))$

d)  $y' = -4x^3$

e)  $y' = \frac{-4 \cos(\ln(2-4x))}{2-4x}$

f)  $y' = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x+1) \cdot (3 \cos 3x + 5 \cos(x+2)) \cdot \sec^2(1-x)$

## 114. Página 208

a)  $y' = \frac{-2}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}$

b)  $y' = -\frac{\operatorname{tg}(2x)}{\sqrt{\ln(\cos(2x))}}$

c)  $y' = e^{-x}(-x^3 + 3x^2 + x - 1)$

d)  $y' = \frac{e^x(2e^x + 1)}{3}$

e)  $y' = \frac{(x^2+1) \cdot \ln(x^2+1) \cdot \cos x - 2x \operatorname{sen} x \cdot (\ln(x^2+1) - 1)}{(x^2+1)^2}$

## 115. Página 208

a)  $y' = \frac{4}{x^2 + 16}$

d)  $y' = \frac{x^2 - 3}{2x \cdot \sqrt{x^3 - x^2 + 1} \sqrt{x^2 - 1}}$

b)  $y' = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 3x^2 + 1}$

e)  $y' = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

c)  $y' = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} = -1$

## 116. Página 209

a)  $y' = -\frac{1}{x^2 - 1}$

d)  $y' = -\frac{\ln 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \sqrt[3]{2^{\cos x}}}{3}$

b)  $y' = \frac{-1}{2x^2 - 2x + 1}$

e)  $y' = -\frac{1}{2x \cdot \ln 2}$

c)  $y' = -\frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$

f)  $y' = -3\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$

## 117. Página 209

a)  $y = \ln \sqrt{\frac{x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{1}{2} \ln(x^2 \operatorname{tg} x) \rightarrow y' = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot (x^2 \sec^2 x + 2x \operatorname{tg} x)}{2x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}$

b)  $y = \frac{\cos 2x + \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x - \operatorname{sen} 2x} \rightarrow y' = \frac{4}{(\cos 2x - \operatorname{sen} 2x)^2}$

c)  $y = \ln \left( \frac{1 + \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right)} \right) \rightarrow y' = \sec x$

d)  $y = \operatorname{tg} x \cdot e^{x^2} \rightarrow y' = e^{x^2} (2x \operatorname{tg} x + \sec^2 x)$

## 118. Página 209

a)  $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

b)  $y = \sqrt[4]{\operatorname{sen}(x^3 + 1)} \rightarrow y' = \frac{1}{4} (\operatorname{sen}(x^3 + 1))^{\frac{3}{4}} \cdot \cos(x^3 + 1) \cdot 3x^2 = \frac{3x^2 \cos(x^3 + 1)}{4\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3(x^3 + 1)}}$

c)  $y = 2^{x^2+4} + x^2 + 4 \rightarrow y' = 2^{x^2+4} \cdot \ln 2 \cdot 2x + 2x = 2x \cdot (2^{x^2+4} \cdot \ln 2 + 1)$

d)  $y = \frac{\ln \sqrt{x+1}}{x} \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+1}} \cdot x - \ln \sqrt{x+1}}{x^2} = \frac{x - 2(x+1) \ln \sqrt{x+1}}{2(x+1)x^2}$

e)  $y = \ln \left( \frac{x}{x+1} \right)^x = x \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) \rightarrow y' = \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) + x \cdot \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{x+1}$

## 119. Página 209

$$f(x) = \frac{\cos x + \cos(x+1)}{\sin x - \sin(x+1)} \rightarrow f'(x) = \frac{-\sin^2 x + \sin^2(x+1) - \cos^2 x + \cos^2(x+1)}{(\sin x - \sin(x+1))^2} = \frac{-1+1}{(\sin x - \sin(x+1))^2} = 0$$

Es razonable suponer que la función  $f(x)$  es constante, porque su derivada es nula.

## 120. Página 209

$$f(x) = \arctg \left( \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \right) \rightarrow f'(x) = -\frac{\cos x}{2 \cdot (1+\sin x) \cdot \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} = -\frac{\cos x}{2 \cdot (1+\sin x) \cdot \frac{1-\sin x}{\cos x}} = -\frac{\cos^2 x}{2 \cdot \cos^2 x} = -\frac{1}{2}$$

## 121. Página 209

$$a) y = (\sqrt{x})^x \rightarrow y' = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^x (2\ln\sqrt{x} + 1)$$

$$b) y = x^{\sqrt{x}} \rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}} \left( \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

$$c) y = (x - \sin x)^{\sqrt{x}} \rightarrow y' = -\frac{1}{2}(x - \sin x)^{\sqrt{x}} \left( \frac{2\sqrt{x}(\cos x - 1)}{x - \sin x} - \frac{\ln(x - \sin x)}{\sqrt{x}} \right)$$

$$d) y = (\sin x)^{2x} \rightarrow y' = 2(\sin x)^{2x} \left( \frac{x \cos x}{\sin x} + \ln(\sin x) \right)$$

$$e) y = \sqrt[3]{\cos x} \rightarrow y' = \sqrt[3]{\cos x} \left( \frac{-\ln(\cos x)}{x^2} - \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)$$

$$f) y = (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \rightarrow y' = (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \left( \cos x \cdot \ln(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) + \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} x} \right)$$

## 122. Página 209

$$a) y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x \rightarrow \ln y = x \ln x \rightarrow \frac{y'}{y} = 1 + \ln x \rightarrow y' = x^x (1 + \ln x)$$

$$b) y = (1+x^2)^x$$

$$\ln y = \ln(1+x^2)^x \rightarrow \ln y = x \ln(1+x^2) \rightarrow \frac{y'}{y} = \ln(1+x^2) + x \cdot \frac{2x}{1+x^2} \rightarrow y' = (1+x^2)^x \left( \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} \right)$$

$$c) y = (\sin x)^{\cos x}$$

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\cos x} \rightarrow \ln y = \cos x \cdot \ln(\sin x) \rightarrow \frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow$$

$$y' = (\sin x)^{\cos x} \left( -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right)$$

$$d) y = \sqrt[3]{x^3}$$

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{x^3} \rightarrow \ln y = \frac{3}{x} \cdot \ln x \rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{3}{x^2} \cdot \ln x + \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow y' = \sqrt[3]{x^3} \cdot \frac{3-3\ln x}{x^2}$$

$$e) y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\ln y = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow \ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow \frac{y'}{y} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \rightarrow y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left( \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$f) y = (\operatorname{tg} x)^x$$

$$\ln y = \ln (\operatorname{tg} x)^x \rightarrow \ln y = x \ln (\operatorname{tg} x) \rightarrow \frac{y'}{y} = \ln (\operatorname{tg} x) + x \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \rightarrow y' = (\operatorname{tg} x)^x \left( \ln (\operatorname{tg} x) + x \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \right)$$

## 123. Página 209

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}y' = -\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\frac{5-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Despejando, se obtiene: } \sqrt{y} = 5 - \sqrt{x} \rightarrow y = (5 - \sqrt{x})^2 \rightarrow y' = 2(5 - \sqrt{x}) \left( -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{5 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

## 124. Página 209

$$a) 3y' - 4 \cdot 2x = 0 \rightarrow y' = \frac{8x}{3}$$

$$b) y = \frac{4x^2}{3}$$

$$c) y' = \frac{8x}{3}$$

## 125. Página 209

$$a) \frac{1}{3} - \frac{y'x - y}{x^2} = 0 \rightarrow y' = \frac{x^2 + 3y}{3x} \rightarrow y' = \frac{x^2 + 3\left(\frac{x^2}{3} - 6x\right)}{3x} \rightarrow y' = \frac{2x}{3} - 6$$

$$b) \frac{x}{3} - 6 = \frac{y}{x} \rightarrow y = \frac{x^2}{3} - 6x$$

$$c) y' = \frac{2x}{3} - 6$$

## 126. Página 209

$$a) x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

$$2x + 2yy' - 2y - 2xy' = 0 \rightarrow (2y - 2x)y' = 2y - 2x \rightarrow y' = \frac{2y - 2x}{2y - 2x} = 1$$

$$b) x = \cos(xy)$$

$$1 = -\operatorname{sen}(xy)(y + xy') \rightarrow y + xy' = -\frac{1}{\operatorname{sen}(xy)} \rightarrow xy' = -\frac{1}{\operatorname{sen}(xy)} - y \rightarrow y' = \frac{-1 - \operatorname{sen}(xy)}{x\operatorname{sen}(xy)}$$

$$c) x^3 + 3y^2 - 2ay = 0$$

$$3x^2 + 6yy' - 2ay' = 0 \rightarrow (6y - 2a)y' = -3x^2 \rightarrow y' = \frac{-3x^2}{6y - 2a}$$

$$d) e^{2y} - \ln x^3 = 3$$

$$e^{2y}2y' - \frac{3x^2}{x^3} = 0 \rightarrow e^{2y}2y' = \frac{3}{x} \rightarrow y' = \frac{3}{2xe^{2y}}$$

## 127. Página 209

$$a) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{2x}{16} + \frac{2y}{4} \cdot y' = 0 \rightarrow \frac{y}{2} \cdot y' = -\frac{x}{8} \rightarrow y' = -\frac{x}{4y}$$

$$b) x^3 + y^3 + xy = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 y' + y + xy' = 0 \rightarrow (3y^2 + x)y' = -3x^2 - y \rightarrow y' = -\frac{3x^2 + y}{3y^2 + x}$$

$$c) y^3 - 2xy + 7 = 3x + 1$$

$$3y^2 y' - 2y - 2xy' = 3 \rightarrow (3y^2 - 2x)y' = 3 + 2y \rightarrow y' = \frac{3 + 2y}{3y^2 - 2x}$$

$$d) (2y^2 + 3)^3 = 5x^3 - 3x$$

$$3(2y^2 + 3)^2 \cdot 4yy' = 15x^2 - 3 \rightarrow y' = \frac{15x^2 - 3}{12y(2y^2 + 3)^2}$$

## 128. Página 209

$$a) y = \arccos x$$

$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\arccos x)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$b) y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$c) y = \operatorname{arctg} x$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \rightarrow f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$d) y = e^x$$

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

$$e) y = \ln x$$

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$f) y = x^2 - 2 \rightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(x^2-2)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2-2+2}}} = 2\sqrt{x^2} = 2x$$

## MATEMÁTICAS EN TU VIDA

### 1. Página 210

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Meterse en la piscina en verano para refrescarse, encender la calefacción para calentarse o el aire acondicionado, utilizar cualquier electrodoméstico o artículo electrónico que libera energía calórica, utilizar una sartén u olla, echar hielos en la bebida...

### 2. Página 210

El punto de equilibrio térmico es la temperatura a la que llegan cuerpo y medio simultáneamente y que hace que no haya más variación de temperatura (en el sentido de bajar una y subir la otra).

### 3. Página 210

Lo que ocurrirá es que tenderán a bajar una y subir otra hasta que lleguen a la misma temperatura y se equilibren.

### 4. Página 210

- Primera ley del movimiento: "Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, salvo que actúen fuerzas sobre él que le obliguen a cambiar de estado".
- Segunda ley del movimiento: "La fuerza neta sobre un objeto es igual a la tasa de variación temporal del producto de su masa y velocidad".
- Tercera ley del movimiento: "A cada acción le corresponde una reacción igual y en sentido opuesto".
- Ley de la Gravitación Universal: la fuerza de atracción entre dos objetos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.
- Teoría de las mareas: Isaac Newton realizó varios estudios del comportamiento de las mareas y calculó la altura de estas según la fecha del mes, la estación del año y la latitud. La explicación que dio es la que se acepta actualmente.
- Teoría del color: descubrió que la luz procedente del sol (la luz blanca) se puede descomponer en colores.