Representación de funciones

10

ACTIVIDADES

1. Página 238

a) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [0, +\infty)$ b) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [-1, 1]$

2. Página 238

a) $x^2 - 3 > 0 \rightarrow (x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3}) > 0 \rightarrow \text{Dom } f = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

b) $\sqrt{x+3} + 2x = 0 \rightarrow \sqrt{x+3} = -2x \rightarrow x+3 = 4x^2 \rightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow \sqrt{1+3} + 2 \neq 0 \\ x = -\dfrac{3}{4} \rightarrow \sqrt{-\dfrac{3}{4} + 3} + 2\left(-\dfrac{3}{4}\right) = 0 \end{cases}$

$x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow \text{Dom } f = \left[-3, -\dfrac{3}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$

3. Página 239

a) $9 - 4x^2 \geq 0 \rightarrow \left(\dfrac{3}{2} - x\right)\left(\dfrac{3}{2} + x\right) \geq 0 \rightarrow x \in \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right] \rightarrow \text{Dom } f = \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

- Cortes con el eje *X*:

  $\sqrt{9 - 4x^2} = 0 \rightarrow 9 - 4x^2 = 0 \rightarrow (3+2x)(3-2x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, 0\right) \\ x = \dfrac{3}{2} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}, 0\right) \end{cases}$

- Corte con el eje *Y*:

  $x = 0 \rightarrow f(0) = \sqrt{9-0} = 3 \rightarrow (0, 3)$

- La función es positiva en todo su dominio, ya que la raíz cuadrada de un número mayor o igual que cero es siempre mayor o igual que cero.

b) $f(x) = \text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \xrightarrow{\text{sen } x \neq 0} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

- Cortes con el eje *X*:

  $\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- Corte con el eje *Y*:

  La función no está definida para $x = 0$; por tanto, no corta el eje *Y*.

- La función es positiva en los intervalos de la forma: $\left(k\pi, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

  La función es negativa en los intervalos de la forma: $\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \pi\right)$.

4. Página 239

a) Por la actividad 2: $\text{Dom}\, f = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

- Cortes con el eje *X*: $\ln(x^2-3)=0 \rightarrow x^2-3=1 \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow (2,0) \\ x=-2 \rightarrow (-2,0) \end{cases}$

- Corte con el eje *Y*:

  La función no está definida para $x = 0$; por tanto, no corta el eje *Y*.

- $f(-3) > 0$ $f(-1{,}8) < 0$ $f(1{,}8) < 0$ $f(3) > 0$

  Entonces, la función es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $\left(-2, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 2\right)$.

b) Por la actividad 2: $\text{Dom}\, f = \left[-3, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

- Cortes con el eje *X*:

  $$f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}+2x} = 0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \rightarrow (-1,0) \\ x=1 \rightarrow (1,0) \end{cases}$$

- Corte con el eje *Y*:

  $$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

- $f(-2) < 0$, $f\left(-\frac{4}{5}\right) > 0$, $f(0) < 0$, $f(2) > 0$

  Entonces, la función es positiva en $\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$ y es negativa en $[-3, -1) \cup \left(-\frac{3}{4}, 1\right)$.

5. Página 240

a) $f(-x) = \ln\left((-x)^2-4\right)+2 = \ln\left(x^2-4\right)+2 = f(x) \rightarrow$ *f*(*x*) es simétrica respecto del eje *Y*.

b) $f(-x) = 3\,sen(-x) = 3(-sen\, x) = -3\, sen\, x = -f(x) \rightarrow$ *f*(*x*) es simétrica respecto del origen de coordenadas.

c) $f(-x) = \sqrt{2(-x)^2-25} = \sqrt{2x^2-25} = f(x) \rightarrow$ *f*(*x*) es simétrica respecto del eje *Y*.

d) $f(-x) = -(-x)^2-27 = x^2-27 = f(x) \rightarrow$ *f*(*x*) es simétrica respecto del eje *Y*.

6. Página 240

a) $f(x+k\pi) = 1-5\cos\left(2(x+k\pi)\right) = 1-5\cos(2x+2k\pi) = 1-5[\cos 2x \cos 2k\pi - sen\, 2x\, sen\, 2k\pi] =$

$= 1-5[\cos 2x \cdot 1 - sen\, 2x \cdot 0] = 1-5\cos 2x = f(x)$

La función *f*(*x*) es periódica de período π.

b) $f\left(x+k\frac{\pi}{2}\right) = tg\left[2\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right] = tg(2x+k\pi) = \dfrac{tg\, 2x + tg\, k\pi}{1 - tg\, 2x \cdot tg\, k\pi} = \dfrac{tg\, 2x + 0}{1 - tg\, 2x \cdot 0} = tg\, 2x$

La función *f*(*x*) es periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

7. Página 240

Sí, es una función periódica con período la unidad.

8. Página 241

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{x(x+2)}=\dfrac{1}{x^2+2x}$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$

9. Página 241

a) $x^3-4x=0\rightarrow x\left(x^2-4\right)=0\rightarrow x(x+2)(x-2)=0\rightarrow \mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^3-4x}=\dfrac{1}{0}=\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=0$.

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x^3-4x}=\dfrac{-1}{0}=\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x^3-4x}=\dfrac{1}{3}=\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=2$.

b) $x^2-16>0\rightarrow x^2-16=0\rightarrow x=\pm 4\xrightarrow{x=0}0^2-16<0\rightarrow \mathrm{Dom}\, f=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to -4^-}\log(x^2-16)=-\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-4$.

$\lim\limits_{x\to -4^+}\log(x^2-16)=-\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=4$.

c) $9-x^2>0\rightarrow(3+x)(3-x)>0\rightarrow \mathrm{Dom}\, f=(-3,3)$

$\lim\limits_{x\to 3^-}\left(1-\ln\left(9-x^2\right)\right)=+\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=3$.

$\lim\limits_{x\to -3^+}\left(1-\ln\left(9-x^2\right)\right)=+\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-3$.

10. Página 242

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^3+3x}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^3+3x}=2\end{array}\right\}\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=2$.

b) $\left.\begin{array}{l}\text{No existe } \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln x}{2x}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2}=0\end{array}\right\}\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=0$.

11. Página 242

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+3}} = 1 \to$ Asíntota horizontal en $y = 1$.

- Si $x \to +\infty$, $\frac{x^2}{\sqrt{x^4+3}} - 1 < 0 \to f(x)$ está por debajo de la asíntota.
- Si $x \to -\infty$, $\frac{x^2}{\sqrt{x^4+3}} - 1 < 0 \to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0 \to$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

- Si $x \to +\infty$, $\frac{x}{x^2-1} - 0 > 0 \to f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \to -\infty$, $\frac{x}{x^2-1} - 0 < 0 \to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

12. Página 243

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x(x^2+3)} = 0 \to f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

b) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2+3)} = 1 \neq 0 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+3} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 3x}{x^2+3} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota oblicua en } y = x.$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2+1}{x(2x^2-x)} = 0 \to f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

13. Página 243

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x(x^2+2)} = 0 \to f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4+1}{x(x^2+x)} = \infty \to f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

c) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x \cdot x} = 1 \neq 0 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = x.$$

$$f(x) - (mx + n) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x} - x = \frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x}$$

- Si $x \to +\infty$, $\frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} > 0 \to f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \to -\infty$, $\frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} < 0 \to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

14. Página 244

a) $f(x)$ es polinómica $\longrightarrow$ $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$ y no tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + 4}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + 4}{2} = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + 4}{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + 4}{2x} = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por tanto, la función tiene ramas parabólicas cuando $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

b) $\text{Dom}\, g = (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to0^+} (x \ln x) \rightarrow 0\cdot\infty \rightarrow \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} (-x) = 0 \rightarrow \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x \ln x) = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por tanto, la función tiene una rama parabólica cuando $x \longrightarrow +\infty$.

15. Página 244

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\lim_{x\to3} \frac{2x^2}{x-3} = \infty \rightarrow \text{Tiene asíntota vertical en } x = 3.$$

$$\lim_{x\to3^-} \frac{2x^2}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x\to3^+} \frac{2x^2}{x-3} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x-3} = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x(x-3)} = 2 \rightarrow m = 2 \\ \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 2x^2 + 6x}{x-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x}{x-3} = 6 \rightarrow n = 6\end{array}\right\} \rightarrow y = 2x + 6 \text{ es asíntota oblicua de } f(x).$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene ramas parabólicas.

b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to-\infty} \left[(1-x)\cdot e^x\right] \rightarrow +\infty\cdot 0 \rightarrow \lim_{x\to-\infty} \left[(1-x)\cdot e^x\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[(-1)\cdot e^x\right] = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal de } f(x).$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[(1-x)\cdot e^x\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)\cdot e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(-e^x\right) = -\infty \rightarrow \text{ La función no tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene ramas parabólicas.

16. Página 245

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0;\, x = -2$$

$f'(-3) > 0$ $f(-1,5) < 0$ $f(-0,5) < 0$ $f(1) > 0$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-2, -1) \cup (-1, 0)$.

b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$$

$f'(-1) < 0$ $f(1) > 0$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

17. Página 245

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x\,e^x + \frac{x^2\,e^x}{2} = \frac{x\,e^x(2+x)}{2} = 0 \rightarrow x = 0;\, x = -2$$

$f'(-3) > 0$ $f'(-1) < 0$ $f(1) > 0$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-2, 0)$.

La función crece a la izquierda del -2 y decrece a la derecha $\rightarrow x = -2$ máximo:

$f(-2) = \frac{2}{e^2} \rightarrow P\left(-2, \frac{2}{e^2}\right)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda del 0 y crece a la derecha $\rightarrow x = 0$ mínimo:

$f(0) = 0 \rightarrow Q(0, 0)$ es un mínimo.

b) $\text{Dom}\, f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{e}$$

$f'\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ $f'(1) > 0$

La función es decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

La función decrece a la izquierda del $\frac{1}{e}$ y crece a la derecha $\rightarrow x = \frac{1}{e}$ mínimo:

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \rightarrow P\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ es un mínimo.

18. Página 246

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (2x+2)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{2x+2}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \to$$ No tiene puntos de inflexión.

$f''(-2) < 0 \longrightarrow f(x)$ es convexa en el intervalo $(-\infty, -1)$.

$f''(0) > 0 \longrightarrow f(x)$ es cóncava en el intervalo $(-1, +\infty)$.

b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2+1)^2 - 4x(4x^3+4x)}{(x^2+1)^4} = \frac{-12x^4 - 8x^2 + 4}{(x^2+1)^4} = \frac{(-12x^2+4)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} = 0 \to -12x^2 + 4 = 0 \to \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$f''(-1) < 0$ $\qquad f''(0) > 0$ $\qquad f''(1) < 0$

$f(x)$ es convexa en el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

$f(x)$ es cóncava en el intervalo $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{1}{2} \to P\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{2}\right)$ es punto de inflexión. $\qquad f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{1}{2} \to Q\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{2}\right)$ es punto de inflexión.

19. Página 246

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x\,e^x + \frac{x^2\,e^x}{2} = \frac{x\,e^x(2+x)}{2}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x + x\,e^x)(2+x) + x\,e^x}{2} = \frac{2\,e^x + x\,e^x + 2x\,e^x + x^2\,e^x + xe^x}{2} = \frac{e^x(x^2+4x+2)}{2} = 0 \to$$

$$\to x^2 + 4x + 2 = 0 \to x = -2 \pm \sqrt{2}$$

$f''(-4) > 0$ $\qquad f''(-1) < 0$ $\qquad f''(0) > 0$

La función $f(x)$ es cóncava en el intervalo $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right)$.

La función $f(x)$ es convexa en el intervalo $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$.

$f\left(-2-\sqrt{2}\right) = \left(3+2\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}} \to P\left(-2-\sqrt{2}, \left(3+2\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}}\right)$ es punto de inflexión.

$f\left(-2+\sqrt{2}\right) = \left(3-2\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}} \to Q\left(-2+\sqrt{2}, \left(3-2\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}\right)$ es punto de inflexión.

b) $\operatorname{Dom} f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$f''(x) = \dfrac{1}{x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene puntos de inflexión.

La función $f(x)$ es cóncava o convexa en todo su dominio. $f''(e) > 0 \longrightarrow$ La función es cóncava en $(0, +\infty)$.

20. Página 247

a) • $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 6x = 2x\left(x^2 - 3\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow$ Corta al eje X en $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$.

$x = 0 \longrightarrow f(0) = 0 \longrightarrow$ Corta al eje Y $(0, 0)$.

• Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2x^3 - 6x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2x^3 - 6x\right) = +\infty$$

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f'(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $(-1, 1)$, $f'(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

La función crece a la izquierda de $x = -1$ y decrece a la derecha $\longrightarrow x = -1$ es un máximo:

$f(-1) = 4 \longrightarrow (-1, 4)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a la derecha $\longrightarrow x = 1$ es un mínimo:

$f(1) = -4 \longrightarrow (1, -4)$ es un mínimo.

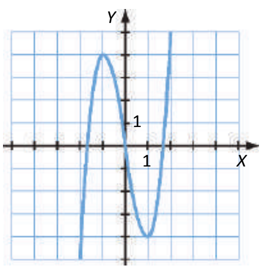
• Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = 12x = 0 \rightarrow x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es cóncava.

La función es convexa a la izquierda de $x = 0$ y cóncava a la derecha $\longrightarrow$ En $x = 0$ hay un punto de inflexión $\longrightarrow (0, 0)$ es punto de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$$f(x)=0 \to 8x^2 - x^4 = x^2\left(8-x^2\right)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{2} \end{cases} \to \text{ Corta al eje } X \text{ en } (0,0),\ \left(2\sqrt{2},0\right) \text{ y } \left(-2\sqrt{2},0\right).$$

$x = 0 \to f(0) = 0 \to (0,0)$

- Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(8x^2 - x^4\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(8x^2 - x^4\right) = -\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x\left(4-x^2\right) = 0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}$$

En $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

En $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

La función crece a la izquierda de $x = -2$ y decrece a la derecha $\to x = -2$ es un máximo:

$f(-2) = 16 \to (-2, 16)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda de $x = 0$ y crece a la derecha $\to x = 0$ es un mínimo:

$f(0) = 0 \to (0, 0)$ es un mínimo.

La función crece a la izquierda de $x = 2$ y decrece a la derecha $\to x = 2$ es un máximo:

$f(2) = 16 \to (2, 16)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

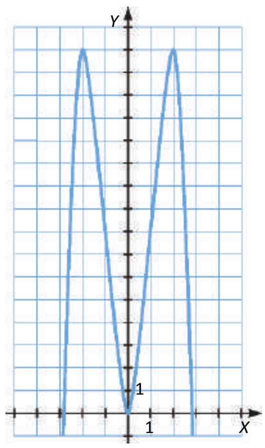
$$f''(x) = -12x^2 + 16 = 4\left(4-3x^2\right) = 0 \to x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

En $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

En el intervalo $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

La función es convexa a la izquierda de $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ y cóncava a la derecha $\to$ En $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ hay punto de inflexión $\to \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{80}{9}\right)$ es punto de inflexión.

La función es cóncava a la izquierda de $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y convexa a la derecha $\to$ En $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ hay punto de inflexión $\to \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{80}{9}\right)$ es punto de inflexión.



21. Página 247

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0 \rightarrow 6x^5-12x^3-4x=2x\left(3x^4-6x^2-2\right)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1{,}51 \end{cases} \rightarrow$ Corta al eje X en $(0,0)$, $(1{,}51;0)$ y $(-1{,}51;0)$.

  $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ Corta al eje Y en $(0, 0)$.

- Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(6x^5-12x^3-4x\right)=-\infty$$

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(6x^5-12x^3-4x\right)=+\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=30x^4-36x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 1{,}14$

  En $(-\infty; -1{,}14) \cup (1{,}14, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En $(-1{,}14; 1{,}14)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = -1{,}14$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = -1{,}14$ es un máximo:

  $f(-1{,}14) = 10{,}79 \rightarrow (-1{,}14; 10{,}79)$ es un máximo.

  La función decrece a la izquierda de $x = 1{,}14$ y crece a la derecha $\rightarrow x = 1{,}14$ es un mínimo:

  $f(1{,}14) = -10{,}79 \rightarrow (1{,}14;-10, 79)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=120x^3-72x=24x\left(5x^2-3\right) \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 0{,}77 \end{cases}$

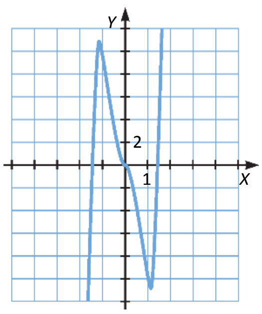
  En $(-\infty; -0{,}77) \cup (0; 0{,}77)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  En $(-0{,}77; 0) \cup (0{,}77, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  La función es convexa a la izquierda de $x = -0{,}77$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = -0{,}77$ hay punto de inflexión $\rightarrow (-0{,}77; 6{,}93)$ es punto de inflexión.

  La función es cóncava a la izquierda de $x = 0$ y convexa a la derecha $\rightarrow$ En $x = 0$ hay punto de inflexión $\rightarrow (0, 0)$ es punto de inflexión.

  La función es convexa a la izquierda de $x = 0{,}77$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = 0{,}77$ hay punto de inflexión $\rightarrow (0{,}77; -6{,}93)$ es punto de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 + x^4 = x^3(1+x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow \text{ Corta al eje } X \text{ en } (0, 0) \text{ y } (-1, 0)$$

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ Corta al eje Y en (0, 0).

• Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^3 + x^4\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^3 + x^4\right) = +\infty$$

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x^3 = x^2(3+4x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

En $\left(-\dfrac{3}{4}, 0\right) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{3}{4}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x = -\dfrac{3}{4}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x = -\dfrac{3}{4}$ es un mínimo:

$f\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -0{,}11 \rightarrow \left(-\dfrac{3}{4}, -0{,}11\right)$ es un mínimo.

• Concavidad y convexidad:

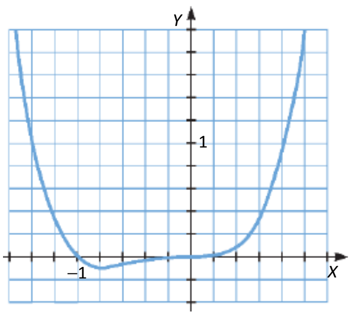
$$f''(x) = 6x + 12x^2 = 6x(1+2x) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

En $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

La función es cóncava a la izquierda de $x = -\dfrac{1}{2}$ y convexa a la derecha $\rightarrow$ En $x = -\dfrac{1}{2}$ hay punto de inflexión $\rightarrow$ $\left(-\dfrac{1}{2}; -0{,}06\right)$ es punto de inflexión.

La función es convexa a la izquierda de $x = 0$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = 0$ punto de inflexión $\rightarrow$ (0, 0) es punto de inflexión.



22. Página 248

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2-5}{x} = 0 \rightarrow x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \rightarrow$ Corta al eje X en $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{5}, 0\right)$.

No corta al eje Y porque en $x = 0$ no está definida.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-5}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-5}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-5}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-5}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x\to \infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2-5}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{-5}{x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

• Crecimiento y decrecimiento:

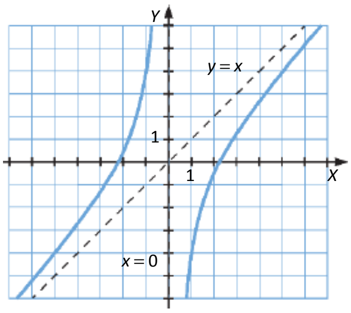
$f'(x) = \frac{x^2+5}{x^2} > 0 \rightarrow$ La función $f(x)$ es creciente en su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = -\frac{10}{x^3} \neq 0 \rightarrow$ La función $f(x)$ no presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.



b) • $x^3 + x = x\left(x^2+1\right) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Dom}\, g = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$g(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x^3+x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ No corta al eje X porque no está definida para $x = 0$.

No corta al eje Y porque la función no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3+x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x^2+1} = 0 \to \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x^3+x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^3+x} = 0 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$g'(x) = \frac{-x^4+x^2}{\left(x^3+x\right)^2} = \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \to x = \pm 1$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $g'(x) < 0 \to g(x)$ es decreciente.

En $(-1, 0) \cup (0, 1)$, $g'(x) > 0 \to g(x)$ es creciente.

$$x = -1 \to g(-1) = -\frac{1}{2} \to \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \text{ es un mínimo.}$$

$$x = 1 \to g(1) = \frac{1}{2} \to \left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ es un máximo.}$$

- Concavidad y convexidad:

$$g''(x) = \frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \to 2x^3-6x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

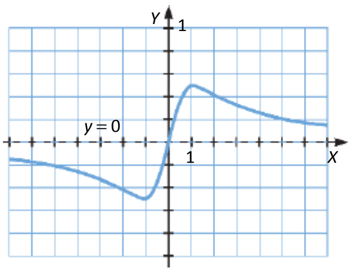
En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$, $g''(x) < 0 \to g(x)$ es convexa.

En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, $g''(x) > 0 \to g(x)$ es cóncava.

$$x = -\sqrt{3} \to g\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \to \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ es punto de inflexión.}$$

$$x = 0 \to g(0) = 0 \to (0, 0) \text{ es punto de inflexión.}$$

$$x = \sqrt{3} \to g\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \to \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ es punto de inflexión.}$$



23. Página 248

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$$f(x) = 0 \to \frac{x^3-3}{x} = 0 \to x^3 - 3 = 0 \to x = \sqrt[3]{3} \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right) \text{ corta al eje } X.$$

No tiene corte con el eje Y porque la función no está definida para $x = 0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-3}{x} = \infty \to \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-3}{x} = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-3}{x} = +\infty \end{aligned}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3}{x^2} = \infty \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-3}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-3}{x} = +\infty$$

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x^3+3}{x^2} = 0 \to 2x^3 + 3 = 0 \to x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2}} \simeq -1{,}14$$

En el intervalo $\left(-\infty, \sqrt[3]{-\frac{3}{2}}\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

En $\left(\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}, 0\right) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2}} \to f\left(\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4} \simeq 3{,}93 \to \left(\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}, \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4}\right) \text{ es un mínimo.}$$

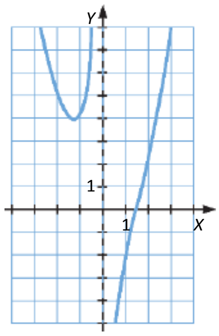
• Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{2x^3-6}{x^3} = 0 \to 2x^3 - 6 = 0 \to x = \sqrt[3]{3}$$

En $(-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{3}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(0, \sqrt[3]{3}\right)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

$$x = \sqrt[3]{3} \to f\left(\sqrt[3]{3}\right) = 0 \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right) \text{ es punto de inflexión.}$$



b) • Dom $g = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

$$g(x) = 0 \to \frac{x^4 - 3x}{x} = 0 \to x^4 - 3x = 0 \to x\left(x^3 - 3\right) = 0 \to x = \sqrt[3]{3} \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right) \text{ corta el eje } X.$$

No tiene corte con el eje *Y* porque la función no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 3x}{x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 - 3}{1} = -3 \to \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^4 - 3x}{x^2} = \infty \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$g'(x) = 3x^2 = 0 \to x = 0$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $g'(x) > 0 \to g(x)$ es creciente.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $g'(x) > 0 \to g(x)$ es creciente.

No presenta máximos ni mínimos, ya que la función no está definida en $x = 0$.

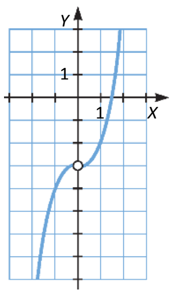
- Concavidad y convexidad:

$g''(x) = 6x = 0 \to x = 0$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $g''(x) < 0 \to g(x)$ es convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $g''(x) > 0 \to g(x)$ es cóncava.

No presenta puntos de inflexión, ya que en $x = 0$ la función no está definida.



24. Página 249

a) • $2x+1\geq 0 \rightarrow x\geq -\frac{1}{2} \rightarrow \text{Dom}\, f=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

• Cortes con los ejes:

$f(x)=0 \rightarrow \sqrt{2x+1}=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2},0\right)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0)=\sqrt{1}=1 \rightarrow (0,1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}}{x}=0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

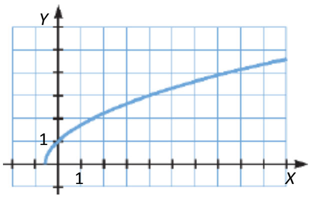
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>0\ \forall x\in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x)=\frac{-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre convexa y no tiene puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f=[0,+\infty)$

• Cortes con los ejes:

$f(x)=0 \rightarrow 2x+\sqrt{x}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0)=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{x}\right)=+\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x}}{x}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene una rama parabólica:

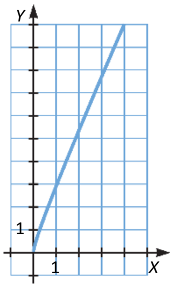
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{x}\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=2+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0\ \forall x\in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=\frac{-1}{4x\sqrt{x}}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es convexa en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



25. Página 249

a) • $4-x^2\geq 0\rightarrow x^2\leq 4\rightarrow |x|\leq 2\rightarrow \text{Dom}\, f=[-2,2]$

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0\rightarrow \sqrt{4-x^2}=0\rightarrow x=\pm 2\rightarrow (-2,0)$ y $(2,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0)=\sqrt{4}=2\rightarrow (0,2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

  No tiene asíntotas horizontales, ni asíntotas oblicuas, ni ramas parabólicas, ya que la función no está definida cuando $x\rightarrow +\infty$ ni cuando $x\rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=0\rightarrow x=0$

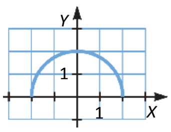
  En el intervalo $(-2, 0)$, $f'(x)>0\rightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(0, 2)$, $f'(x)<0\rightarrow f(x)$ es decreciente.

  $x=0\rightarrow f(0)=2\rightarrow (0,2)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=\frac{-4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es convexa en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f = [0, +\infty)$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow x + \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = \sqrt{1} = 1 \rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{x}\right) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

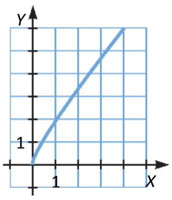
Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{x}\right) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre convexa y no tiene puntos de inflexión.



26. Página 250

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow e^{-x} - 2 = 0 \rightarrow x = -\ln 2 \rightarrow (-\ln 2, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = 1 - 2 = -1 \rightarrow (0, -1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{-x} - 2\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-x} - 2\right) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = -2 \text{ cuando } x \rightarrow +\infty.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x} - 2}{x} = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

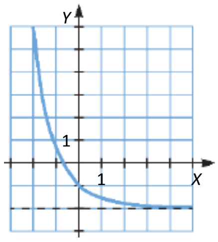
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{-x} - 2\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = -e^{-x} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = e^{-x} > 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre cóncava y no presenta puntos de inflexión.



b) - $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow 3 + e^{\frac{x}{2}} \neq 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función no corta al eje X.

  $f(0) = 3 + e^0 = 4 \rightarrow (0, 4)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3 + e^{\frac{x}{2}}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3 + e^{\frac{x}{2}}\right) = 3\end{array}\right\} \rightarrow \text{Tiene una asíntota horizontal en } y = 3 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty.$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3 + e^{\frac{x}{2}}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3 + e^{\frac{x}{2}}}{x} = 0\end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene una rama parabólica:

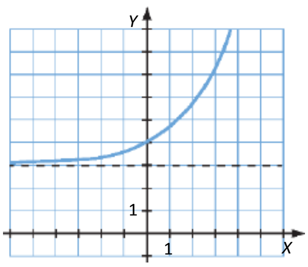
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(3 + e^{\frac{x}{2}}\right) = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} > 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} > 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es cóncava en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



27. Página 250

a) • $\text{Dom}\, f = [0, +\infty)$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} > 0 \ \forall\, x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función no corta al eje *X*.

$f(0) = \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\right) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\right) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}} > 0 \ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

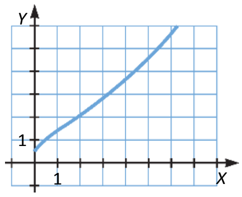
• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)}{8x\sqrt{x}} = 0 \rightarrow x = 1$

En el intervalo (0, 1), $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava.

$x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{e}{2} \rightarrow \left(1, \frac{e}{2}\right)$ es un punto de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} \neq 0 \ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función no corta al eje *X*.

$f(0) = \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}}{x}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}=+\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{2}}=0\to x=0$$

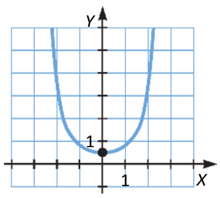
  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

  $x=0\to f(0)=\frac{1}{2}\to\left(0,\frac{1}{2}\right)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}\left(1+x^2\right)\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$ La función es siempre cóncava y no presenta puntos de inflexión.



28. Página 251

a)
- $2x-4>0\to x>2\to \text{Dom}\, f=(2,+\infty)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0\to \ln(2x-4)=0\to 2x-4=1\to x=\frac{5}{2}\to\left(\frac{5}{2},0\right)$ es el punto de corte con el eje X.

  No tiene puntos de corte con el eje Y, ya que la función no está definida para $x=0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\ln(2x-4)\right]=-\infty\to$ Asíntota vertical en $x=2$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2x-4)\right]=+\infty\to$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x-4)}{x}=0\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

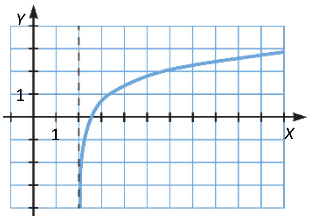
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [\ln(2x-4)] = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \dfrac{1}{x-2} > 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



b) • $4-2x > 0 \rightarrow x < 2 \rightarrow \text{Dom}\, f = (-\infty, 2)$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \ln(4-2x) = 0 \rightarrow 4-2x = 1 \rightarrow x = \dfrac{3}{2} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = \ln 4 \rightarrow (\ln 4, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} [\ln(4-2x)] = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [\ln(4-2x)] = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(4-2x)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

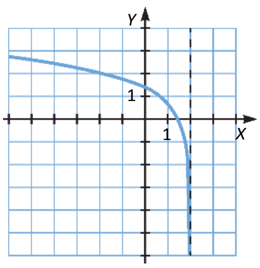
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [\ln(4-2x)] = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \dfrac{1}{x-2} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



29. Página 251

a) • $x^2-3>0 \rightarrow x^2>3 \rightarrow \text{Dom}\, f=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0 \rightarrow \ln\left(x^2-3\right)=0 \rightarrow x^2-3=1 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow (-2,0)$ y $(2,0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  No tiene corte con el eje *Y*, ya que la función no está definida para $x=0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^-}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=-\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-\sqrt{3}$.

  $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=-\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=\sqrt{3}$.

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x}=0\end{array}\right\}\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

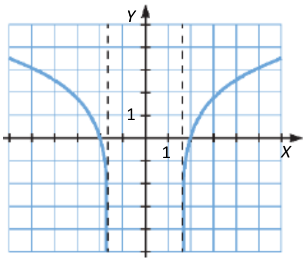
  $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}\neq 0\ \forall x\in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función no presenta máximos ni mínimos.

  En el intervalo $\left(-\infty,\sqrt{3}\right)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$,$f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=\dfrac{-2x^2-6}{\left(x^2-3\right)^2}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es convexa en todo su dominio y no tiene puntos de inflexión.



b) • $3-x^2>0 \rightarrow x^2<3 \rightarrow \text{Dom}\, f=\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0 \rightarrow \ln\left(3-x^2\right)=0 \rightarrow 3-x^2=1 \rightarrow x=\pm\sqrt{2} \rightarrow \left(-\sqrt{2},0\right)$ y $\left(\sqrt{2},0\right)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0)=\ln 3 \rightarrow (0,\ln 3)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^+}\left[\ln\left(3-x^2\right)\right] = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x=-\sqrt{3}$.

  $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-}\left[\ln\left(3-x^2\right)\right] = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x=\sqrt{3}$.

  No tiene asíntotas horizontales, ni oblicuas, ni ramas parabólicas, porque la función no está definida cuando $x \longrightarrow -\infty$ ni cuando $x \longrightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-3} = 0 \to x = 0$

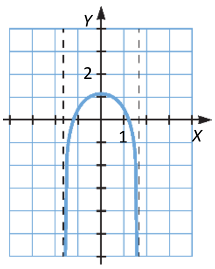
  En el intervalo $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $f'(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $\left(\sqrt{3}, 0\right)$, $f'(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ decreciente.

  $x = 0 \to f(0) = \ln 3 \to (0, \ln 3)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \dfrac{-2x^2-6}{\left(x^2-3\right)^2} < 0\ \forall x \in \text{Dom} f \to$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



30. **Página 252**

- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Continuidad:

  Las funciones de cada tramo son continuas, pero la función no es continua en $x = 1$:

  $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = e^0 = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) \to$ Salto de discontinuidad finito en $x = 1$.

- Cortes con los ejes:

  $f(x) \neq 0\ \forall x \in \text{Dom} f \to$ No corta al eje X.

  $f(0) = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \to \left(0, \dfrac{1}{e^2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x-2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2 = +\infty \end{array}\right\} \to$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{x} = +\infty \to$$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

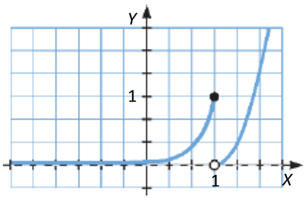
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x-2} & \text{si } x \le 1 \\ 2(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases} \to f'(x) > 0\ \forall x \in \text{Dom } f \to$$ Es siempre creciente y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \begin{cases} 4e^{2x-1} & \text{si } x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \to f''(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \to$$ La función es siempre cóncava y no tiene puntos de inflexión.



31. Página 252

- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Continuidad:

  Las funciones de cada tramo son continuas, pero la función no es continua en $x = -2$:

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = 0 \ne 3 = \lim_{x\to-2^+} f(x) \to$$ Salto de discontinuidad finito en $x = -2$.

- Cortes con los ejes:

$$f(x) = 0 \to \begin{cases} \ln(-1-x) = 0 \to x = -2 \to (-2, 0) \\ 4 - \sqrt{x+3} = 0 \to x = 13 \to (13, 0) \end{cases}$$ son los puntos de corte con el eje X.

$f(0) = 4 - \sqrt{3} \to \left(0, 4-\sqrt{3}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [\ln(-1-x)] = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[4-\sqrt{x+3}\right] = -\infty \end{array}\right\} \to$$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-1-x)}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-\sqrt{x+3}}{x} = 0 \end{array}\right\} \to$$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [\ln(-1-x)] = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[4-\sqrt{x+3}\right] = -\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

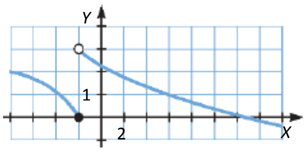
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x\le -2\\[2mm] \dfrac{-1}{2\sqrt{x+3}} & \text{si } x>-2\end{cases} \rightarrow f'(x)<0\ \forall x\in\mathbb{R} \rightarrow$$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x\le -2\\[2mm] \dfrac{1}{4(x+3)\sqrt{x+3}} & \text{si } x>-2\end{cases} \rightarrow f''(x)\ne 0\ \forall x\in\mathbb{R}\rightarrow$$ La función no tiene puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -2)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(-2, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

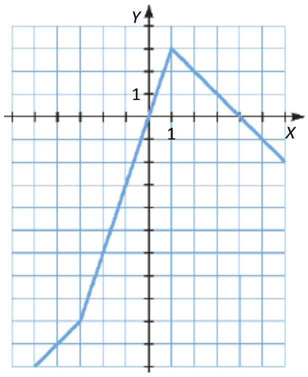


32. Página 253

a) $$f(x)=\begin{cases}-x-3+2x-2-1 & \text{si } x<-3\\ x+3+2x-2-1 & \text{si } -3\le x\le 1\\ x+3-2x+2-1 & \text{si } 1<x\end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases}x-6 & \text{si } x<-3\\ 3x & \text{si } -3\le x\le 1\\ -x+4 & \text{si } 1<x\end{cases}$$

Se trata de representar cada una de las rectas en su correspondiente intervalo. Teniendo en cuenta la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de ellas:

$$y=x-6\rightarrow\begin{cases}m=1\\ n=-6\end{cases}\qquad y=3x\rightarrow\begin{cases}m=3\\ n=0\end{cases}\qquad y=-x+4\rightarrow\begin{cases}m=-1\\ n=4\end{cases}$$



b) Representaremos la función sin tener en cuenta el valor absoluto: $f(x) = x - x^3$.

- $\text{Dom} f=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$$f(x)=0\rightarrow x-x^3=x(1-x^2)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\pm 1\end{cases}\rightarrow (0,0),\ (1,0)\ \text{y}\ (-1,0)$$ son los puntos de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x - x^3\right) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - x^3\right) = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \to x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

  En $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

  $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \to f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \to \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ es un mínimo.

  $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \to f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \to \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

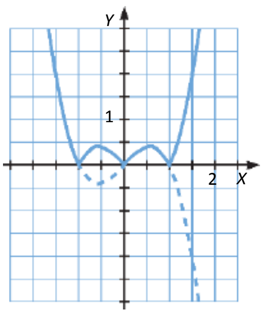
  $f''(x) = -6x = 0 \to x = 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

  $f(0) = 0 \to (0, 0)$ es un punto de inflexión.

Una vez representada la función sin valor absoluto, dibujamos las partes negativas como positivas, haciendo una simetría respecto del eje X.



33. Página 253

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Sean $g(x) = 1 - e^{-x}$ y $h(x) = 1 - e^{x}$.

- $\text{Dom}\, g = \text{Dom}\, h = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $g(x) = 0 \to 1 - e^{-x} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte de $g(x)$ con el eje X.

  $h(x) = 0 \to 1 - e^{x} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte de $h(x)$ con el eje X.

$g(0) = 1 - e^0 = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte de *g*(*x*) con el eje *Y*.

$h(0) = 1 - e^0 = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte de *h*(*x*) con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Ni *g*(*x*) ni *h*(x) tienen asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - e^{-x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - e^{-x}\right) = -\infty\end{array}\right\} \to g(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - e^{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - e^{x}\right) = 1\end{array}\right\} \to h(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-x}}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 - e^{-x}}{x} = +\infty\end{array}\right\} \to g(x) \text{ no tiene asíntotas oblicuas.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - e^{x}}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 - e^{x}}{x} = 0\end{array}\right\} \to h(x) \text{ no tiene asíntotas oblicuas.}$$

  g(*x*) y *h*(*x*) tienen una rama parabólica:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - e^{-x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - e^{x}\right) = -\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $g'(x) = e^{-x} > 0\ \forall x \in \text{Dom}\, g \to$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

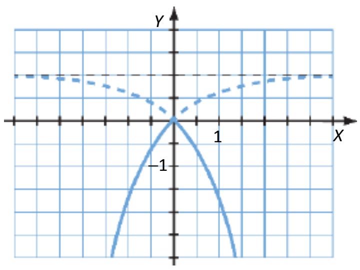
  $h'(x) = -e^{x} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, h \to$ La función es decreciente en todo su dominio y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $g''(x) = -e^{-x} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, g \to$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

  $h''(x) = -e^{x} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, h \to$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

Por último, para representar *f*(*x*), representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



b) $f(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2-4\right) & \text{si} \quad x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\\ \ln\left(4-x^2\right) & \text{si} \quad x\in(-2,2)\end{cases}$

Sean $g(x)=\ln\left(x^2-4\right)$ y $h(x)=\ln\left(4-x^2\right)$

- $\text{Dom}\, g=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ $\qquad$ $\text{Dom}\, h=(-2,2)$

- Cortes con los ejes:

  $g(x)=0\rightarrow\ln\left(x^2-4\right)=0\rightarrow x^2-4=1\rightarrow x=\pm\sqrt{5}\rightarrow\left(-\sqrt{5},0\right)$ y $\left(\sqrt{5},0\right)$ son los puntos de corte de $g(x)$ con el eje X.

  $h(x)=0\rightarrow\ln\left(4-x^2\right)=0\rightarrow 4-x^2=1\rightarrow x=\pm\sqrt{3}\rightarrow\left(-\sqrt{3},0\right)$ y $\left(\sqrt{3},0\right)$ son los puntos de corte de $h(x)$ con el eje X.

  La función $g(x)$ no tiene corte con el eje Y.

  $h(0)=\ln 4\rightarrow(0,\ln 4)$ es el punto de corte de $h(x)$ con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ tiene asíntotas verticales en } x=-2 \text{ y en } x=2.$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\left[\ln\left(4-x^2\right)\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left[\ln\left(4-x^2\right)\right]=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow h(x) \text{ tiene asíntotas verticales en } x=-2 \text{ y en } x=2.$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ no tiene asíntotas horizontales.}$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-4\right)}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-4\right)}{x}=0\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ no tiene asíntotas oblicuas.}$$

  $h(x)$ no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas porque no está definida cuando $x\rightarrow-\infty$ ni cuando $x\rightarrow+\infty$.

  $g(x)$ tiene dos ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $g'(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}\neq 0\ \forall x\in\text{Dom}\, g\rightarrow$ La función no presenta máximos ni mínimos.

  En el intervalo $(-\infty,-2)$, $g'(x)<0\rightarrow g(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $(2,+\infty)$, $g'(x)>0\rightarrow g(x)$ es creciente.

  $h'(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}=0\rightarrow x=0$

  En el intervalo $(-2, 0)$, $h'(x)>0\rightarrow h(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(0, 2)$, $h'(x)<0\rightarrow h(x)$ es decreciente.

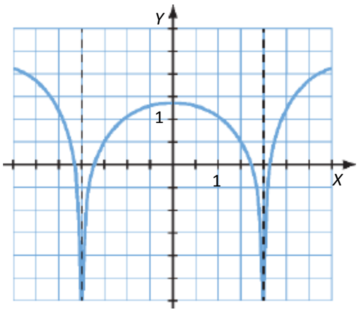
  $x=0\rightarrow h(0)=\ln 4\rightarrow(0,\ln 4)$ es un máximo de $h(x)$.

- Concavidad y convexidad:

$$g''(x) = \frac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, g \rightarrow \text{ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.}$$

$$h''(x) = \frac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, h \rightarrow \text{ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.}$$

Por último, para representar $f(x)$, representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



34. Página 254

$x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$ $\qquad \frac{1}{x+2} \geq 0 \rightarrow x+2 > 0 \rightarrow x > -2$ $\qquad \sqrt{\frac{1}{x+2}} > 0 \rightarrow x+2 > 0 \rightarrow x > -2$

$\text{Dom}\, f = (-2, +\infty)$

35. Página 254

$$f(-x) = \frac{5\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}\right)}{(-x)^2+2} = \frac{5\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2+2} = f(x) \rightarrow \text{ La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.}$$

36. Página 254

$$y = \frac{x+1}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+1}{x^2-x} = a \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}x^2+1}{x-1} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{2x-2}\right) = \frac{1}{2}$$

37. Página 255

$f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (2, 6) \rightarrow f(x)$ crece. $\qquad f'(x) < 0$ en $(-2, 2) \cup (6, +\infty) \rightarrow f(x)$ decrece.

$f'(x) = 0 \rightarrow x = x_1, x = x_2, x = x_3$

Mínimos: $x = x_2$ $\qquad$ Máximos: $x = x_1, x = x_3$

$f'(x)$ decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \rightarrow f(x)$ es convexa.

$f'(x)$ crece en $(0, 4) \rightarrow f(x)$ es cóncava.

$f''(x) = 0 \rightarrow$ Estos serán los máximos o mínimos de $f'(x)$.

$x = 0$ y $x = 4$ son puntos de inflexión.

38. Página 255

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Punto de corte: (0, 0)

Asíntotas verticales: $x = 2$, $x = -2$

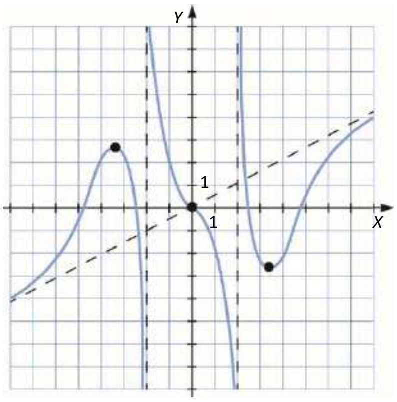
Asíntota oblicua: $y = \frac{1}{2}x$

Crece en $\left(-\infty, -\sqrt{12}\right) \cup \left(\sqrt{12}, +\infty\right)$.

Máximo: $\left(\sqrt{12}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Decrece en $\left(-\sqrt{12}, -2\right) \cup (-2, 2) \cup \left(2, \sqrt{12}\right)$.

Mínimo: $\left(-\sqrt{12}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$



39. Página 256

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow f'(1) = 3a + b = 0 \\ f(1) = a + b + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a + b = 0 \\ a + b = -1 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

40. Página 256

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow x^2 e^{-x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 e^{-x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 e^{-x}\right) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ *f*(*x*) tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 e^{-x}\right) = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = x\,e^{-x}(2-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En el intervalo (0, 2), $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es un mínimo.

$x = 2 \rightarrow f(2) = \dfrac{4}{e^2} \rightarrow \left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right) = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

En el intervalo $\left(-\infty, 2-\sqrt{2}\right) \cup \left(2+\sqrt{2}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

$x = 2-\sqrt{2} \rightarrow f\left(2-\sqrt{2}\right) = \left(6-4\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}-2} \rightarrow \left(2-\sqrt{2}, (6-4\sqrt{2})\,e^{\sqrt{2}-2}\right)$ es punto de inflexión.

$x = 2+\sqrt{2} \rightarrow f\left(2+\sqrt{2}\right) = \left(6+4\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}+2} \rightarrow \left(2+\sqrt{2}, (6+4\sqrt{2})\,e^{\sqrt{2}+2}\right)$ es punto de inflexión.

b) - $\text{Dom} f = (0, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

$$f(x) = 0 \rightarrow x\ln x - x = 0 \rightarrow x(\ln x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = e \rightarrow (e, 0) \end{cases} \rightarrow (e, 0)$$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x\ln x - x) = \lim_{x\to 0^+}\left[x(\ln x - 1)\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x - 1}{\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{-\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x - x) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x - x}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x\ln x - x) = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \ln x = 0 \rightarrow x = 1$

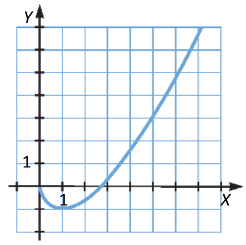
  En el intervalo (0, 1), $f'(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo (1, +∞), $f'(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

  $x = 1 \rightarrow f(1) = -1 \rightarrow (1, -1)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \frac{1}{x} > 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



41. Página 257

- Simetría:

  $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$

  Es simétrica respecto del origen de coordenadas, solo es necesario estudiar la función en el intervalo $(0, +\infty)$.

- $\text{Dom}\, f = (0, +\infty) - \{1\}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow$ Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

  No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} < 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función $f(x)$ es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

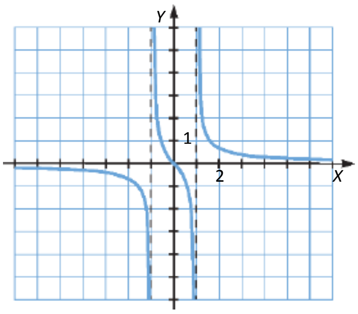
$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{\left(x^2 - 1\right)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

En el intervalo $(0, 1)$, $f''(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es cóncava.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$ es punto de inflexión.

Se dibuja la gráfica teniendo en cuenta la simetría de la función:



42. Página 257

$$f(x) = \frac{|x|}{|x| - 1} = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Sean $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ y $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

- $\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\qquad$ $\text{Dom } h = \mathbb{R} - \{1\}$

- Cortes con los ejes:

$g(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte de g con el eje X.

$h(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x-1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte de h con el eje X.

$g(0) = \dfrac{x}{x+1} = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte de g con el eje Y.

$h(0) = \dfrac{x}{x-1} = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte de h con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow g(x) \text{ tiene asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow h(x) \text{ tiene asíntota vertical en } x = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x+1}=1\end{array}\right\}\to g(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-1}=1\end{array}\right\}\to h(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y=1.$$

Ni $g(x)$ ni $h(x)$ tienen ramas parabólicas.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $g'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0\ \forall x\in \text{Dom } g\to$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

  $h'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0\ \forall x\in \text{Dom } h\to$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $g''(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^3}\neq 0\ \forall x\in \text{Dom } g\to$ La función no presenta puntos de inflexión.

  En el intervalo $(-\infty, -1)$, $g''(x)>0\to g(x)$ es cóncava.

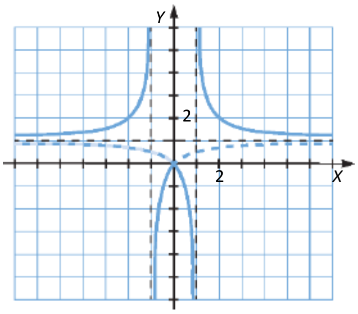
  En el intervalo $(-1, +\infty)$, $g''(x)<0\to g(x)$ es convexa.

  $h''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}\neq 0\ \forall x\in \text{Dom } h\to$ La función no presenta puntos de inflexión.

  En el intervalo $(-\infty, 1)$, $h''(x)<0\to h(x)$ es convexa.

  En el intervalo $(1, +\infty)$, $h''(x)>0\to h(x)$ es cóncava.

Por último, para representar $f(x)$, representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



ACTIVIDADES FINALES

43. Página 258

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 3x - 9 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -9 \rightarrow (0, -9)$

b) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$

Puntos de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6)$

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = -x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow (-3, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow (-2, 0) \\ x = -1 \rightarrow (-1, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow (0, -4)$

44. Página 258

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x+6}{x-2} = 0 \rightarrow x = -6 \rightarrow (-6, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

b) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-3\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x^2 - 4}{x + 3} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -\frac{4}{3} \rightarrow \left(0, -\frac{4}{3}\right)$

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x+3}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4} \rightarrow \left(0, -\frac{3}{4}\right)$

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -1 \rightarrow (-1, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

45. Página 258

a) $\text{Dom}\, y = (-\infty, 4]$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{4-x} - 3 = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow (-5, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

b) $\text{Dom}\, y = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{3x+4} - 5 = 0 \rightarrow x = 7 \rightarrow (7, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

c) $\text{Dom}\, y = [-5, 5]$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{25 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

d) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{x^2 + 9} - 5 = 0 \rightarrow x = \pm 4 \rightarrow (-4, 0), (4, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow (0, -2)$

46. Página 258

a) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = x \cdot e^x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 2^x - 1 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 2 - 2^{\frac{1}{x}} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

d) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 9 - 3^{2-\frac{1}{x}} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No tiene puntos de corte.

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

47. Página 258

a) Dom $y = (-3, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \log_3(3x+9) = 0 \rightarrow x = -\frac{8}{3} \rightarrow \left(-\frac{8}{3}, 0\right)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$

b) Dom $y = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \ln(x^2+2x) = 0 \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2} \rightarrow \left(-1-\sqrt{2}, 0\right), \left(-1+\sqrt{2}, 0\right)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

c) Dom $y = (-2, 4)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \log_2\left(\frac{2+x}{4-x}\right) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

Puntos de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

d) Dom $y = (1, 2) \cup (2, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x}{\log_2(x-1)} \neq 0\ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ No tiene puntos de corte.

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

48. Página 258

a) Dom $y = \mathbb{R} - \{0\}$

b) Dom $y = \mathbb{R} - \{1\}$

c) Dom $y = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $-1 \leq x^2 - 8 \leq 1 \rightarrow 7 \leq x^2 \leq 9 \rightarrow \begin{cases} \sqrt{7} \leq x \leq 3 \\ -3 \leq x \leq -\sqrt{7} \end{cases} \rightarrow \text{Dom } y = \left(-3, -\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7}, 3\right)$

49. Página 258

a) $(-\infty, -4) \cup \{-3, +3\}$

b) $(4, +\infty) \cup \{-3, +3\}$

c) $(-\infty, -4]$

d) $(-\infty, -2) \cup \{3\}$

e) $(2, +\infty) \cup \{-3\}$

f) $[4, +\infty)$

50. Página 258

a) Dom $y = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

b) Dom $y = (-\infty, -2) \cup [0, 1] \cup (3, +\infty)$

c) Dom $y = (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$

d) Dom $y = \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5}, -2\right) \cup \left(2, \sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$

51. Página 258

a) Dom $y = (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Dom $y = [3, 4) \cup (4, 7)$

c) Dom $y = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

d) Dom $y = [-5, -1) \cup (-1, 2]$

52. Página 258

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{1\}$

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

53. Página 258

Tenemos que buscar los valores para los que $f(x)$ no está definida.

El denominador de la función se anula para $x = 0$; así que ese será un valor.

$tg\, x = \dfrac{sen\, x}{cos\, x}$ no está definida en los puntos donde se anula el coseno, es decir, en $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$.

Así, los valores de m para los que $f(x)$ tal que $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ son $\{0\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

54. Página 258

a) $f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

b) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 5 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

c) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 3 = x^2 + x + 3 \rightarrow$ No es simétrica.

d) $f(-x) = \dfrac{3(-x)}{(-x)^2 - 9} = \dfrac{-3x}{x^2 - 9} = -\dfrac{3x}{x^2 - 9} = -f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

e) $f(-x) = \dfrac{\ln|-x|}{-x + 4} = \dfrac{\ln|x|}{-x + 4} \rightarrow$ No es simétrica.

f) $f(-x) = \left(2(-x)^2 - 1\right)^2 = \left(2x^2 - 1\right)^2 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

55. Página 258

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje Y.

$f(-x) = \dfrac{-x - 1}{(-x)^2} = \dfrac{-x - 1}{x^2} \rightarrow$ No es simétrica.

b) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{e^x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{e^{-x}} = x^2\, e^x \rightarrow$ No es simétrica.

c) $25-x^2 \geq 0 \rightarrow (5-x)(5+x) \geq 0 \rightarrow x \in [-5,5] \rightarrow \text{Dom } y = [-5,5]$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \rightarrow \sqrt{25-x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5,0),(5,0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0,5)$

$f(-x) = \sqrt{25-(-x)^2} = \sqrt{25-x^2} = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje *Y*.

d) $4-x^2 \geq 0 \rightarrow (2-x)(2+x) \geq 0 \rightarrow x \in [-2,2] \rightarrow \text{Dom } y = [-2,2]$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \rightarrow \sqrt{4-x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2,0),(2,0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0,2)$

$f(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} = \sqrt{4-x^2} = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje *Y*.

e) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \rightarrow 7-2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \rightarrow \left(-\sqrt{\frac{7}{2}},0\right),\left(\sqrt{\frac{7}{2}},0\right)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0,7)$

$f(-x) = 7-2(-x)^2 = 7-2x^2 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje *Y*.

f) $x^2-2x+7 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2-2x+7} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No tiene.

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{7} \rightarrow \left(0,\sqrt{7}\right)$

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2-2(-x)+7} = \sqrt{x^2+2x+7} \rightarrow$ No es simétrica.

56. Página 258

a) $f(x+2k\pi) = 2\,sen(x+2k\pi) = 2[sen\ x\ cos\ 2k\pi - cos\ x\ sen\ 2k\pi] = 2[sen\ x \cdot 1 - cos\ x \cdot 0] = 2\ sen\ x = f(x)$

La función es periódica de período 2π.

b) $f(x+k\pi) = sen(2x+2k\pi) = sen\ 2x\ cos\ 2k\pi - cos\ 2x\ sen\ 2k\pi = sen\ 2x \cdot 1 - cos\ 2x \cdot 0 = sen\ 2x = f(x)$.

La función es periódica de período π.

c) $f(x+6k\pi) = 3\,sen\left(\frac{x}{3}+2k\pi\right) = 3\left[sen\ \frac{x}{3}\ cos\ 2k\pi - cos\ \frac{x}{3}\ sen\ 2k\pi\right] = 3\left[sen\ \frac{x}{3} \cdot 1 - cos\ \frac{x}{3} \cdot 0\right] = 3\ sen\ \frac{x}{3} = f(x)$

La función es periódica de período 6π.

d) $f(x+k\pi) = 2tg(x+k\pi) = 2\,tg(x+k\pi) = 2\frac{tg\ x + tg\ k\pi}{1-tg\ x \cdot tg\ k\pi} = 2\frac{tg\ x + 0}{1-tg\ x \cdot 0} = 2\ tg\ x = f(x)$

La función es periódica de período π.

e) $f\left(x+k\frac{\pi}{2}\right) = tg\left[2\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right] = tg(2x+k\pi) = \frac{tg\ 2x + tg\ k\pi}{1-tg\ 2x \cdot tg\ k\pi} = \frac{tg\ 2x + 0}{1-tg\ 2x \cdot 0} = tg\ 2x = f(x)$

La función es periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

f) $f(x+3k\pi) = 3\ tg\left(\frac{x}{3}+k\pi\right) = 3\frac{tg\ \frac{x}{3} + tg\ k\pi}{1-tg\ \frac{x}{3} \cdot tg\ k\pi} = 3\frac{tg\ \frac{x}{3} + 0}{1-tg\ \frac{x}{3} \cdot 0} = 3\ tg\ \frac{x}{3} = f(x)$

La función es periódica de período 3π.

57. Página 258

a) $f\left(x+\frac{2k\pi}{3}\right)=cos(3x+2k\pi)=cos\,3x\,cos\,2k\pi-sen\,3x\,sen\,2k\pi=cos\,3x\cdot1-sen\,3x\cdot0=cos\,3x=f(x)$

La función es periódica de período $\frac{2\pi}{3}$.

b) $f(x+k\pi)=sen^2(x+k\pi)=\frac{1-cos(2x+2k\pi)}{2}=\frac{1-(cos\,2x\,cos\,2k\pi-sen\,2x\,sen\,2k\pi)}{2}=$

$=\frac{1-(cos\,2x\cdot1-sen\,2x\cdot0)}{2}=\frac{1-cos\,2x}{2}=sen^2x=f(x)$

La función es periódica de período π.

c) Utilizando el apartado b) de la actividad 56 y el apartado a) de esta actividad tenemos:

$f(x+2k\pi)=sen(2x+4k\pi)\,cos(3x+6k\pi)=sen\,2x\,cos\,3x=f(x)$

La función es periódica de período 2π.

d) $f(x+2k\pi)=3\,cos(x+2k\pi)=3(cos\,x\,cos\,2k\pi-sen\,x\,sen\,2k\pi)=3()cos\,x\cdot1-sen\,x\cdot0=3\,cos\,x=f(x)$

La función es periódica de período 2π.

e) $f(x+2k\pi)=sen\left(x-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)cos\,2k\pi-cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)sen\,2k\pi=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot1-cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot0=$

$=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$

f) La función no es periódica.

58. Página 259

a) $y=1$

b) $x=-1$ $x=1$ $y=0$

c) $y=0$

d) $x=-1$ $y=\frac{x-1}{2}$

e) $y=-x$ $y=x$

59. Página 259

a) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-2x+6\right)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-2x+6\right)=+\infty$

b) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2\right)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2\right)=+\infty$

c) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^3-2x-1\right)=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^3-2x-1\right)=+\infty$

d) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^4+3x^2-x-1\right)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^4+3x^2-x-1\right)=-\infty$

60. Página 259

a) Dom $y=\mathbb{R} \rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=0.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

b) Dom $y=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

$$\lim_{x\to-3} f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{5x}{x^2-9}=\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=-3.$$

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{5x}{x^2-9}=\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=3.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{x^2-9}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x}{x^2-9}=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=0.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

c) Dom $y=\mathbb{R}-\{1\}$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{2x}{x+1}=\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=-1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x+1}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x+1}=2\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=2.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

d) Dom $y=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

$$\lim_{x\to-3} f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{4x^2}{x^2-9}=\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=-3.$$

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{4x^2}{x^2-9}=\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=3.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2}{x^2-9}=4\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2}{x^2-9}=4\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=4.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

e) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{3x^2+7}{2x+4} = \infty \to \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2+7}{2x+4} = -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+7}{2x+4} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+7}{2x^2+4x} = \frac{3}{2} \to m = \frac{3}{2} \\ \lim_{x\to \infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to \infty} \left(\frac{3x^2+7}{2x+4} - \frac{3}{2}x\right) = \lim_{x\to \infty} \left(\frac{-6x+7}{2x+4}\right) = -3 \to n = -3\end{array}\right\} \to \text{Tiene una asíntota oblicua en } y = \frac{3x-6}{2}.$$

f) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{-2x^4}{x^2-1} = \infty \to \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{-2x^4}{x^2-1} = \infty \to \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x^4}{x^2-1} = -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^4}{x^2-1} = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{-2x^4}{x^3-x} = \infty \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x^4}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^4}{x^2-1} = -\infty$$

61. Página 259

a) $\text{Dom } y = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

No tiene asíntotas verticales porque la función está definida en los extremos del dominio.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-4x} = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-4x} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x} = 1 \\ \lim_{x\to \infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2-4x} - x = -2\end{array}\right\} \to \text{Tiene asíntota oblicua en } y = x - 2.$$

b) $\text{Dom } y = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

No tiene asíntotas verticales porque la función está definida en los extremos del dominio.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^4-1}}{x} = -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^4-1}}{x} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2} = 1 \\ \lim_{x\to \infty} f(x) - x = \lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^4-1}}{x} - x = 0\end{array}\right\} \to \text{Tiene asíntota oblicua en } y = x.$$

c) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-2x^4}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

d) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{x\sqrt{x}} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

e) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{x}} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2 - 2}{x\sqrt[3]{x}} = \infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

f) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{x\sqrt[4]{|x|}} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

62. Página 259

a) $\text{Dom } y = (-3, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} (\log_3 (3x + 9)) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -3$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (\log_3 (3x + 9)) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\log_3 (3x + 9)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

b) $\text{Dom}\, y = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(x^2+2x\right)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

c) $\text{Dom}\, y = (-2, 4)$

$\lim\limits_{x\to -2+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \left(\log_2\left(\frac{2+x}{4-x}\right)\right) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \left(\log_2\left(\frac{2+x}{4-x}\right)\right) = +\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 4$.

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas porque la función no está definida cuando $x \longrightarrow -\infty$ ni cuando $x \longrightarrow +\infty$.

d) $\text{Dom}\, y = (1, 2) \cup (2, +\infty)$

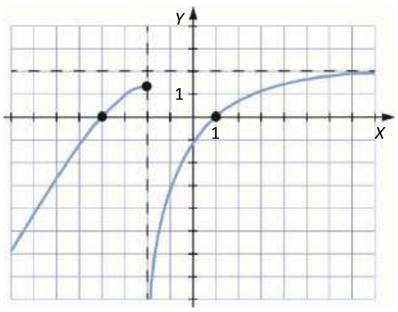
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{\log_2(x-1)}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x}{\log_2(x-1)}\right) = \infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 2.$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{\log_2(x-1)}\right) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x \cdot \log_2(x-1)} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

63. Página 259

Respuesta abierta. Por ejemplo:



64. Página 259

a) $\text{Dom}\, f = (-2, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{4-x^2}{\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{(2+x)(2-x)}{\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to -2^+} \left[\sqrt{x+2}(2-x)\right] = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos^2 2x}{3x^2} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos^2 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{8\cos 2x \operatorname{sen} 2x}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{16\cos^2 2x - 16\operatorname{sen}^2 2x}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \to \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

c) $\text{Dom}\, f = \left\{\left(-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} - \{0\}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 4x)}{x^2} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\operatorname{tg} 4x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-16(1+\operatorname{tg}^2 4x)}{2} = -8 \to \text{No tiene}$$
asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\ln(\cos 4x)}{x^2} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\ln(\cos 4x)}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{Tiene asíntotas verticales en los puntos } x = \pm\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

d) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2^{x+1} - 3^{x+1}}{x+1} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2^{x+1} - 3^{x+1}}{x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{2^{x+1}\ln 2 - 3^{x+1}\ln 3}{1} = 2\ln 2 - 3\ln 3 \to \text{No tiene}$$
asíntotas verticales.

65. Página 259

a) $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (4x \cdot e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4x}{e^x}\right) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (4x \cdot e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{4x}{e^x}\right) = 0 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

b) $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(3x \cdot e^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(3x \cdot e^{\frac{1}{x}}\right) = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x\left(\sqrt[x]{e} - 3\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x\left(e^{\frac{1}{x}} - 3\right)\right) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(2x\left(\sqrt[x]{e} - 3\right)\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(2x\left(e^{\frac{1}{x}} - 3\right)\right) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

d) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(3x \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{3x}}\right) \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{3x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{-3}{9+x^2}}{\frac{-1}{3x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{-3}{9+x^2}}{\frac{-1}{3x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{9x^2}{9+x^2}\right) = 9 \to \text{Asíntota horizontal en } y = 9.$$

66. Página 259

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+3x-2}{bx+5}=3<\infty\to a=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{bx+5}=\dfrac{3}{b}=3\to b=1\end{array}\right\}\to f(x)=\dfrac{3x-2}{x+5}$$

$\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{-5\}$

$\lim\limits_{x\to-5} f(x)=\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{3x-2}{x+5}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-5$.

67. Página 259

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+3x-2}{bx^2+5x}=\dfrac{a}{b}=m=1\to a=b\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax^2+3x-2-ax^2-5x}{ax+5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x-2}{ax+5}\right)=\dfrac{-2}{a}=n=2\to a=b=-1\end{array}\right\}\to f(x)=\dfrac{-x^2+3x-2}{-x+5}$$

$\lim\limits_{x\to5} f(x)=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{-x^2+3x-2}{-x+5}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=5$.

68. Página 259

a) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{9-(-x)^2}=\dfrac{x^2}{9-x^2}=f(x)\to$ La función es simétrica respecto del eje Y.

b) $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2}{9-x^2}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-3$.

$\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2}{9-x^2}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{9-x^2}=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{9-x^2}=-1\end{array}\right\}\to \text{ Asíntota horizontal en } y=-1.$$

69. Página 260

a) $f(-x)=\dfrac{-(-x)^3}{(-x)^2-4}=\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\dfrac{-x^3}{x^2-4}=-f(x)\to$ Simetría respecto del origen.

b) $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3}{x^3-4x}=-1=m\\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x^3+x^3-4x}{x^2-4}\right)=0=n\end{array}\right\}\to \text{Tiene asíntota oblicua en } y=-x.$$

70. Página 260

a) $f(-x)=(-x)\cdot e^{-(-x)^2}=-x\cdot e^{-x^2}=-\left(x\cdot e^{-x^2}\right)=-f(x)\rightarrow$ Simetría respecto del origen de coordenadas.

$\text{Dom}\, f=\mathbb{R}\rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{-x^2}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^{-x^2}\right)=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Tiene asíntota horizontal en } y=0.$$

No tiene asíntotas oblicuas porque tiene asíntotas horizontales.

b) $f(-x)=\frac{1}{2}\ln|-x|=\frac{1}{2}\ln|x|=f(x)\rightarrow$ Simetría respecto del eje Y.

$\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\ln|x|=-\infty\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln|x|}{x}=0\rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

71. Página 260

$\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot \text{sen}\, x}{x}\rightarrow\frac{0}{0}\rightarrow\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos x}{1}=a\rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

72. Página 260

a) $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}$ $\qquad y'=3x^2+12x-15=0\rightarrow\begin{cases}x=-5\\ x=1\end{cases}$

En $(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$, $y'>0\rightarrow$ Función creciente.

En $(-5, 1)$, $y'<0\rightarrow$ Función decreciente.

En $x=-5$ presenta un máximo, y en $x=1$, un mínimo.

b) $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}-\{0\}$ $\qquad y'=\frac{4x^2-1}{x^2}=0\rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

En $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, $y'>0\rightarrow$ Función creciente. En $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $y'<0\rightarrow$ Función decreciente.

En $x=-\frac{1}{2}$ presenta un máximo, y en $x=\frac{1}{2}$, un mínimo.

c) Dom $y = \mathbb{R} - \{3\}$

$y' = \frac{-2}{(x-3)^3} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \to$ No tiene máximos ni mínimos.

En $(-\infty, 3)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $(3, +\infty)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

d) Dom $y = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 72x^2 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 18 \end{cases}$

En $(18, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $(-\infty, 0) \cup (0, 18)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En $x = 18$ presenta un mínimo.

e) Dom $y = \mathbb{R}$

$y' = \frac{3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3}{2} = 0 \to 3^x - \frac{1}{3^x} = 0 \to (3^x)^2 - 1 = 0 \to 3^x = 1 \to x = 0$

En $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En $(0, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

f) Dom $y = \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \frac{3x^4 - 2}{x^2} = 0 \to x = \pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

En $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $\left(-\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En $x = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ presenta un máximo, y en $x = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$, un mínimo.

73. Página 260

a) $x^2 - 2x \geq 0 \to x(x-2) \geq 0 \to \text{Dom } y = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$y' = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 0 \to x = 1$, que no está en el dominio.

En $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En $(2, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

b) Dom $y = (0, +\infty)$

$y' = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \to 2\ln x = 1 \to x = \sqrt{e}$

En $(0, \sqrt{e})$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $(\sqrt{e}, +\infty)$ $y' < 0 \to$ Función decreciente.

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{4\}$

$y' = \dfrac{-8}{(x-4)^2} < 0 \rightarrow$ La función es decreciente en su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{2x - x^2 \ln 3}{3^x} = 0 \rightarrow x(2 - x\ln 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{\ln 3} \end{cases}$$

En $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2}{\ln 3}, +\infty\right)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $\left(0, \dfrac{2}{\ln 3}\right)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo, y en $x = \dfrac{2}{\ln 3}$ un máximo.

74. Página 260

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = \dfrac{-2x^2 + 4}{e^x} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

b) $x = -\sqrt{2} \rightarrow f\left(-\sqrt{2}\right) = \dfrac{-4\sqrt{2} + 4}{e^{-\sqrt{2}}} \rightarrow \left(-\sqrt{2}, \dfrac{-4\sqrt{2} + 4}{e^{-\sqrt{2}}}\right)$ es un mínimo.

$x = \sqrt{2} \rightarrow f\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{4\sqrt{2} + 4}{e^{\sqrt{2}}} \rightarrow \left(\sqrt{2}, \dfrac{4\sqrt{2} + 4}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ es un máximo.

75. Página 260

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \rightarrow$ Es simétrica respecto del eje *Y*.

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 1.$$

$|x| > 1 \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2 - 1} - 1 > 0 \rightarrow$ La gráfica está por encima de la asíntota.

Como tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \pm\infty$, no tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.