e) $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \rightarrow x=0$

En $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, $f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0,1)\cup(1,+\infty)$, $f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

f) $x=0 \rightarrow f(0)=0 \rightarrow (0,0)$ es máximo.

No presenta mínimos.

76. Página 260

a) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{0\}$

b) Cortes con el eje X: $f(x)=0 \rightarrow \dfrac{x+1}{x^2}=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow (-1,0)$

Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x=0$.

c) $f(-x)=\dfrac{(-x)+1}{(-x)^2}=\dfrac{-x+1}{x^2} \rightarrow$ No es simétrica par ni impar.

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=0\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=0.$$

Como tiene asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$, no tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

e) $f'(x)=\dfrac{-x-2}{x^3}=0 \rightarrow x=-2$

En $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, $f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(-2,0)$, $f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

f) $x=-2 \rightarrow f(-2)=\dfrac{-1}{4} \rightarrow \left(-2,\dfrac{-1}{4}\right)$ es un mínimo.

No presenta máximos.

77. Página 260

a) $\text{Dom } y=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x+2$

$y''=6x-6=0 \rightarrow x=1$

En $(-\infty,1)$, $y''<0 \longrightarrow$ Función convexa.

En $(1,+\infty)$, $y''>0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En $x=1$ presenta un punto de inflexión.

b) $\text{Dom } y=\mathbb{R}-\{-2\}$

$y'=\dfrac{4}{(x+2)^2}$

$y''=\dfrac{-8}{(x+2)^3}\neq 0$ en $\mathbb{R} \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $(-\infty,-2)$, $y''>0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En $(-2,+\infty)$ $y''<0 \longrightarrow$ Función convexa.

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 16x$ $\qquad$ $y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{12}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

En $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

En $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ presenta puntos de inflexión.

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$y' = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$ $\qquad$ $y'' = \frac{12x^2 + 4x}{(x^2 - 1)^3} \neq 0 \text{ en } \mathbb{R} \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En $(1, 1)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

78. Página 260

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = e^x(2x + x^2)$ $\qquad$ $y'' = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3} \neq 0 \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $\left(-\infty, -2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{2}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En $\left(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}\right)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

En $x = -2 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.

b) $\text{Dom } y = (0, +\infty) - \{1\}$

$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ $\qquad$ $y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$

En $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

En $(1, e^2)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En $x = e^2$ presenta un punto de inflexión.

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = 1 - \cos x$ $\qquad$ $y'' = \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

En $(2k'\pi, 2k'\pi + \pi)$ con $k' \in \mathbb{Z}$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En $((2k' - 1)\pi, 2k'\pi)$ con $k' \in \mathbb{Z}$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

En $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ presenta puntos de inflexión.

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$

$y'' = \frac{-16}{(x^2 - 16)\sqrt{x^2 - 16}} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.

79. Página 260

$\text{Dom} f = \mathbb{R}$

$f(x) = 3x^2 - 18x + 18 = 0 \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$

En $\left(-\infty, 3-\sqrt{3}\right) \cup \left(3+\sqrt{3}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $\left(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right)$, $f'(x) < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

$f''(x) = 6x - 18 = 0 \rightarrow x = 3$

En $(-\infty, 3)$, $f''(x) < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

En $(3, +\infty)$, $f''(x) > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

$x = 3 \rightarrow f(3) = 0 \rightarrow (3, 0)$ es punto de inflexión.

$\left.\begin{array}{l} f'(3) = -9 \rightarrow m = -9 \\ y = -9x + n \rightarrow 0 = -9 \cdot 3 + n \rightarrow n = 27 \end{array}\right\} \rightarrow y = -9x + 27$ es la recta tangente a $f(x)$ que pasa por el punto (3, 0).

80. Página 260

$\text{Dom} f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{ax} + xa\,e^{ax} = e^{ax}(1 + ax) = 0 \rightarrow 1 + ax = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{a} = -2 \rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

En $(-\infty, -2)$, $f'(x) < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $(-2, +\infty)$, $f'(x) > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

$f''(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \dfrac{x}{4}\right) = 0 \rightarrow x = -4$

En $(-\infty, -4)$, $f''(x) < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

En $(-4, +\infty)$, $f''(x) > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

$f''(-2) > 0 \rightarrow \left(-2, \dfrac{-2}{e}\right)$ es un mínimo.

81. Página 260

$\text{Dom} f = (0, +\infty)$

$f'(x) = 1 + \dfrac{a}{x} = 0 \rightarrow x = -a = 3 \rightarrow a = -3 \rightarrow f(x) = x - 3\ln x$

En $(-\infty, 3)$, $f'(x) < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $(3, +\infty)$, $f'(x) > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

$f''(x) = \dfrac{3}{x^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

$f''(3) > 0 \rightarrow \left(3, 3(1 - \ln 3)\right)$ es un mínimo.

82. Página 260

Dom $f=\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-2x+a=0 \rightarrow f'(2)=8+a=0 \rightarrow a=-8 \\ f(2)=b-12=0 \rightarrow b=12 \end{array}\right\} \rightarrow f(x)=x^3-x^2-8x+12$$

$$f'(x)=3x^2-2x-8=0 \rightarrow x=2,\ x=-\frac{4}{3}$$

En $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$, $f'(x)>0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(-\frac{4}{3},2\right)$, $f'(x)<0 \rightarrow$ Función decreciente.

$$f''(x)=6x-2=0 \rightarrow x=\frac{1}{3}$$

En $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$, $f''(x)<0 \rightarrow$ Función convexa.

En $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$, $f''(x)>0 \rightarrow$ Función cóncava.

$f''(2)=10>0 \rightarrow (2,0)$ es un mínimo.

83. Página 260

Dom $f=\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow f''(x)=6x+2a=0 \rightarrow x=\frac{-a}{3}=\frac{4}{3} \rightarrow a=-4 \\ f'(x)=3x^2+2ax+b=0 \rightarrow f'(1)=3+2a+b=0 \rightarrow b=-3-2a=5 \\ f(1)=1-4+5+c=2+c=0 \rightarrow c=-2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x)=x^3-4x^2+5x-2$$

$$f'(x)=3x^2-8x+5=0 \rightarrow x=1,\ x=\frac{5}{3}$$

En $(-\infty,1)\cup\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$, $f'(x)>0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(1,\frac{5}{3}\right)$, $f'(x)<0 \rightarrow$ Función decreciente.

$$f''(x)=6x-8=0 \rightarrow x=\frac{4}{3}$$

En $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$, $f''(x)<0 \rightarrow$ Función convexa.

En $\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$, $f''(x)>0 \rightarrow$ Función cóncava.

84. Página 261

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow (4, 0), (-2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0) = -8 \rightarrow (0, -8)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - 2x - 8\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 2x - 8\right) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$

En el intervalo $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

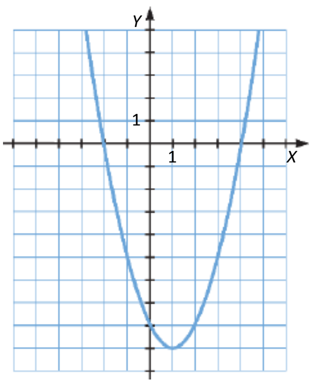
En el intervalo $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a la derecha $\rightarrow x = 1$ es un mínimo:

$f(1) = -9 \rightarrow (1, -9)$ es un mínimo.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - x^2 = x^2(x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - x^2\right) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - x^2\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=0 \to 3x^2-2x=x(3x-2)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

En $(-\infty,\ 0)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x=\dfrac{2}{3}$ y crece a la derecha $\to$ $x=\dfrac{2}{3}$ es un mínimo:

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{27} \to \left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{27}\right)$ es un mínimo.

La función crece a la izquierda de $x = 0$ y decrece a la derecha $\to$ $x = 0$ es un máximo:

$f(0) = 0 \to (0, 0)$ es un máximo.

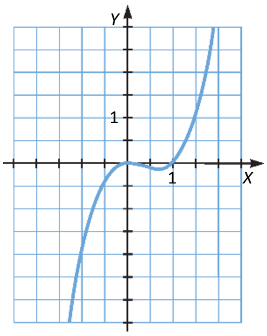
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=6x-2=0 \to x=\frac{1}{3}$$

En el intervalo $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{27} \to \left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{27}\right)$ es punto de inflexión.



c) - $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0 \to 2x^3=0 \to x=0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0)=0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3\right)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

  En $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente $\rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

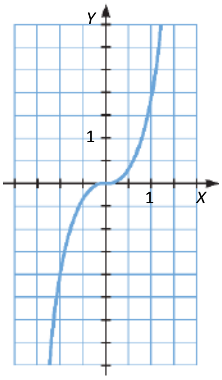
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 12x = 0 \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es punto de inflexión.



d) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2) = (x-1)(x+1)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow (2, 0), (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje X.

  $f(0) = 2 \rightarrow (0, 2)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 2) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 2) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

  En $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}, \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ y decrece a la derecha $\rightarrow$ $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ es un máximo.

  La función decrece a la izquierda de $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ es un mínimo.

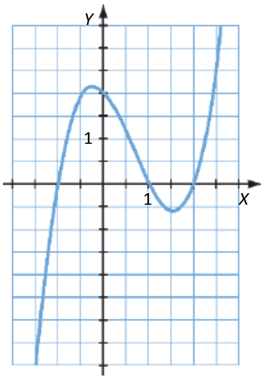
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 6x - 4 = 0 \to x = \frac{2}{3}$

  En el intervalo $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

  $x = \frac{2}{3}$ es punto de inflexión.



e) - $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \to \frac{x^3}{2} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

  $f(0) = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 0 \to \frac{3x^2}{2} = 0 \to x = 0$

  En $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente $\to f(x)$ no tiene ni máximos ni mínimos.

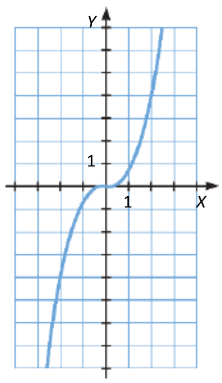
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 3x = 0 \to x = 0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

  $f(0) = 0 \to (0, 0)$ es punto de inflexión.



f) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow (1, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0) = 1 \rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2} \right) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2} \right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = x - \dfrac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

En el intervalo $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty \right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

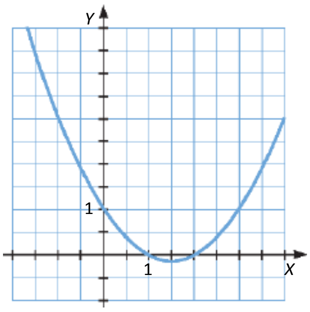
En el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{3}{2} \right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x = \dfrac{3}{2}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x = \dfrac{3}{2}$ es un mínimo:

$f\left(\dfrac{3}{2} \right) = -\dfrac{1}{8} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{8} \right)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



g) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow -x^2 + \dfrac{9}{4} = 0 \rightarrow x = \pm\dfrac{3}{2} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, 0 \right), \left(\dfrac{3}{2}, 0 \right)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0) = \dfrac{9}{4} \rightarrow \left(0, \dfrac{9}{4} \right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2 + \dfrac{9}{4} \right) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^2 + \dfrac{9}{4} \right) = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = -2x = 0 \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

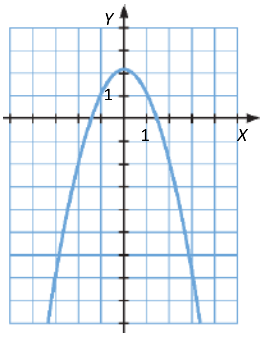
  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = 0$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = 0$ es un máximo:

  $f(0) = \frac{9}{4} \rightarrow \left(0, \frac{9}{4}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = -2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



85. Página 261

a) • $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow (4, 0), (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{19}}{3}$

  En $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4 + \sqrt{19}}{3}, +\infty\right)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En el intervalo $\left(\frac{4 - \sqrt{19}}{3}, \frac{4 + \sqrt{19}}{3}\right)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = \frac{4 - \sqrt{19}}{3}$ y decrece a la derecha $\rightarrow$ $x = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$ es un máximo.

  La función decrece a la izquierda de $x = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$ es un mínimo.

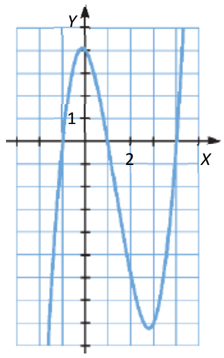
- Concavidad y convexidad:

$y'' = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

En el intervalo $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

En el intervalo $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

$x = \frac{4}{3}$ es punto de inflexión.



b) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

No se pueden encontrar por Ruffini los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y' = 3(x-2)^2 \rightarrow x \neq 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función siempre creciente.

No presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

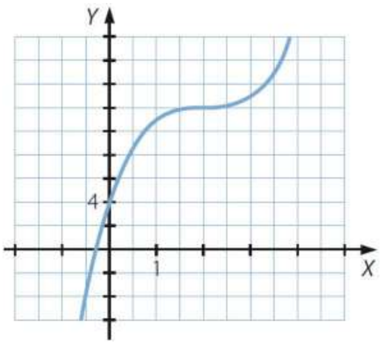
$y'' = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

En el intervalo $(2, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

En el intervalo $(-\infty; 2)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

En $x = 2$ presenta un punto de inflexión.

Por último, como en $(-\infty, 2)$ la función es creciente, la imagen de 0 es positiva y $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = -\infty$, hay un punto de corte en $(-\infty, 0)$.



c) • Dom $y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow x^3 + 3x = x\left(x^2 + 3\right) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + 3x\right) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + 3x\right) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 + 3 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

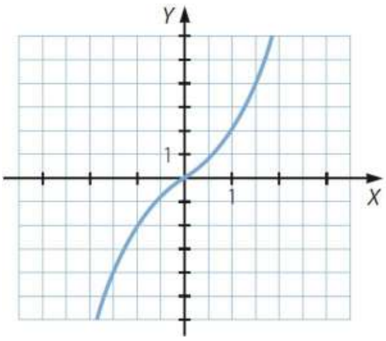
• Concavidad y convexidad:

$y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Es cóncava.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Es convexa.

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



d) • Dom $y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{7} \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow \left(-\sqrt{7}, 0\right), \left(\sqrt{7}, 0\right), (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 7 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 7)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^4 - 8x^2 + 7\right) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 - 8x^2 + 7\right) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = 0 \rightarrow 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

En $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $x = -2$ y en $x = 2$ presenta dos mínimos y en $x = 0$, un máximo.

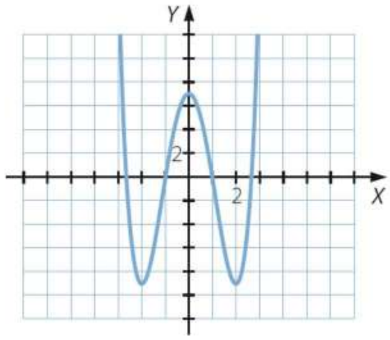
- Concavidad y convexidad:

$$y''=12x^2-16=0\to x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

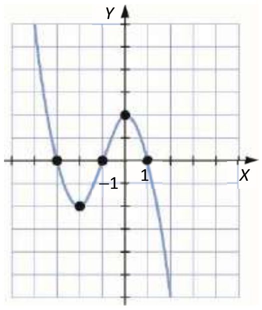
En $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$, $y''>0\to$ Es cóncava.

En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}},\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$, $y''<0\to$ Es convexa.

En $x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ presenta puntos de inflexión.



86. Página 261



Como es una función polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\to$ En el intervalo $(-\infty,-2)$ es decreciente.

Como corta al eje *X* en (–3, 0) y en (–1, 0) → En el intervalo $(-2,0)$ es creciente.

Como vuelve a cortar al eje *X* en (1, 0) y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ → En el intervalo $(0,-\infty)$ es decreciente.

Por tanto, en el punto (–2, 2) tiene un mínimo, y en el punto (0, 2) tiene un máximo.

Además, en algún punto del intervalo $(-2,0)$ debe tener un punto de inflexión donde pase de cóncava a convexa.

87. Página 261

a) $f'(x)=3x^2+a=0\to x=\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\to a=-4$

b) $f(x)=x^3-4x$

$f(x)=0\to x^3-4x=x(x^2-4)=0\to\begin{cases}x=0\\x=\pm2\end{cases}\to(0,0),(-2,0),(2,0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x=0\to f(0)=0\to(0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

La función es positiva en $(-2,0)\cup(2,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,-2)\cup(0,2)$.

c) $f'(x)=0 \rightarrow 3x^2-4=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

En $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$, $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}},\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

$f''(x)=6x=0 \rightarrow x=0$

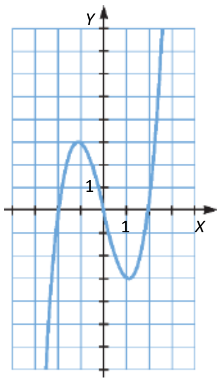
En el intervalo $(0,+\infty)$, $f''(x)>0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x)<0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

d) En $x=-\sqrt{\frac{4}{3}}$ tiene un máximo. En $x=\sqrt{\frac{4}{3}}$ tiene un mínimo.

En $x=0$ tiene un punto de inflexión.

e)



El recorrido de la función es todo $\mathbb{R}$.

88. Página 261

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ $f''(x)=6x+2a$

Tiene un extremo relativo en $x=2$ $\rightarrow f'(2)=0 \rightarrow 12+4a+b=0$

Tiene un punto de inflexión en $x=0$ $\rightarrow f''(0)=0 \rightarrow 2a=0 \rightarrow a=0 \rightarrow b=-12$

Pasa por el punto (1, –5) $\rightarrow f(1)=1+a+b+c=-5 \rightarrow 1-12+c=-5 \rightarrow c=6$

Por tanto, la función es: $f(x)=x^3-12x+6$

Para obtener su representación gráfica, analizamos sus características:

- $\text{Dom} f=\mathbb{R}$
- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0 \rightarrow x^3-12x+6=0 \rightarrow$ Las soluciones de esta ecuación son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0)=6 \rightarrow (0,6)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-12x+6\right)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-12x+6\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=0 \rightarrow 3x^2-12=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

  En el intervalo $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(-2, 2)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  En $x=-2$ presenta un máximo, y en $x=2$ un mínimo.

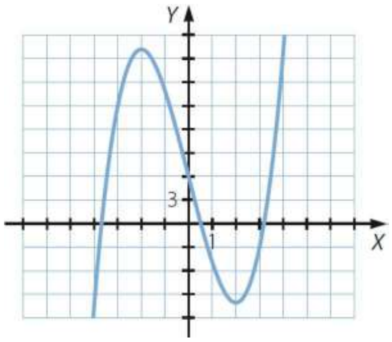
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=6x=0 \rightarrow x=0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x)>0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x)<0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  En $x=0$ presenta un punto de inflexión.



89. Página 261

a) $x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow \text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$f(x)=0 \rightarrow \dfrac{3x^2}{x^2-1}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0 \rightarrow f(0)=0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

b) La función es positiva en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y negativa en el intervalo $(-1,1)$.

c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=3\\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=3\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=3.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

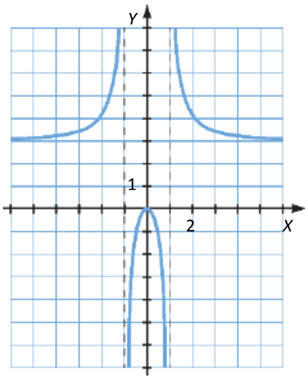
d) $f'(x)=\dfrac{-6x}{(x^2-1)^2}=0 \rightarrow x=0$

En $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0,1)\cup(1,+\infty)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

e) En $x = 0$ presenta un máximo.

La gráfica aproximada sería:



90. Página 261

a) $x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R}-\{-1\}$

$f(x)=0 \rightarrow \frac{-x^2}{x+1}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

b) La función es positiva en el intervalo $(-\infty, -1)$ y negativa en el intervalo $(-1, +\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{-x^2}{x+1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-x^2}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-x^2}{x+1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-x^2}{x^2+x} = -1 \rightarrow m=-1 \\ \lim\limits_{x\to \infty} (f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{-x^2}{x+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 1 \rightarrow n=1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y=-x+1.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

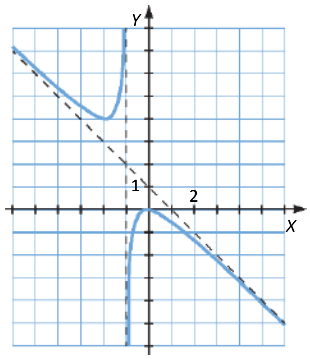
d) $f'(x) = \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$

En $(-2,-1) \cup (-1,0)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x = -2$, la función tiene un mínimo, y en $x = 0$ un máximo.

e)



91. Página 261

a) $x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow \text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

$f(x)=0 \rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-4}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x=0 \rightarrow f(0)=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^2-4}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^3-4x}=1\rightarrow m=1\\ \lim\limits_{x\to \infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x}{x^2-4}\right)=0\rightarrow n=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y=x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=0 \rightarrow \begin{cases} x=0\\ x=\pm 2\sqrt{3}\end{cases}$

En $(-\infty,-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{3},+\infty)$, $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-2\sqrt{3},-2)\cup(-2,2)\cup(2,2\sqrt{3})$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x=-2\sqrt{3}$, la función tiene un máximo, y en $x=2\sqrt{3}$ un mínimo.

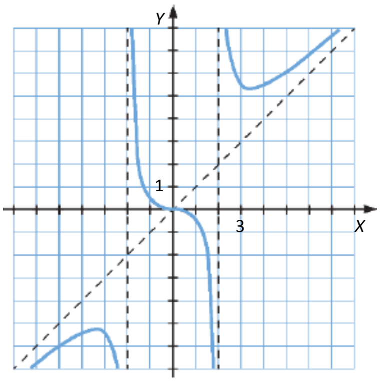
c) $f''(x)=\dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}=0 \rightarrow x=0$

En $(-\infty,-2)\cup(0,2)$, $f''(x)<0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En $(-2,0)\cup(2,+\infty)$, $f''(x)>0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En $x=0$ presenta un punto de inflexión.

d)



92. Página 261

a) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 - 1}{x} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje X.

No tiene punto de corte con el eje Y porque no está definida en $x = 0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{-1}{x}\right) = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

• Crecimiento y decrecimiento:

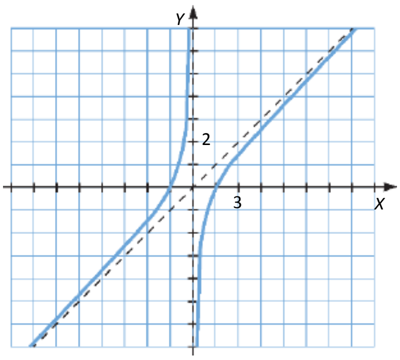
$y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

• Concavidad y convexidad:

$y'' = -\dfrac{2}{x^3} \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y'' > 0 \rightarrow$ La función es cóncava.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ La función es convexa.



b) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1}=\infty \to$$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\infty \to$$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2-1}=0\\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2-1}=0\end{array}\right\}\to$$ Asíntota horizontal en $y=0$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R} \to$$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

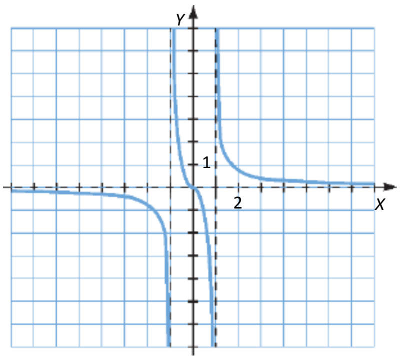
- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0\to x=0$$

En $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, $y''<0 \to$ La función es convexa.

En $(-1,0)\cup(1,+\infty)$, $y''>0 \to$ La función es cóncava.

En $x=0$ tiene un punto de inflexión.



c) - Dom $y=\mathbb{R}-\{0\}$

- Cortes con los ejes:

$y=0\to \frac{4-x^2}{x}=0\to x=\pm 2\to(-2,0),(2,0)$ son los puntos de corte con el eje X.

$x=0\to y=0\to(0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4-x^2}{x}=\infty\to$$ Asíntota vertical en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -\infty}\frac{4-x^2}{x}=+\infty\\ \lim_{x\to +\infty}\frac{4-x^2}{x}=-\infty\end{array}\right\}\to$$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-x^2}{x^2}=-1\to m=-1 \\ \lim\limits_{x\to\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{x}\right)=0\to n=0 \end{array}\right\}\to \text{Asíntota oblicua en } y=-x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

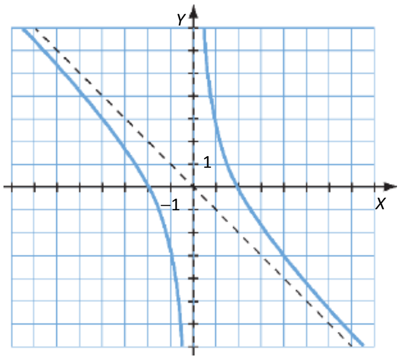
$y'=\dfrac{-(x^2+4)}{x^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$y''=\dfrac{8}{x^3}\neq 0\to$ No tiene puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y''<0 \to$ La función es convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y''>0 \to$ La función es cóncava.



d) • $\text{Dom } y=\mathbb{R}-\{-1, 1\}$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\to\dfrac{x^3}{x^2-1}=0\to x=0\to(0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0\to y=0\to(0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty \end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=1\to m=1 \\ \lim\limits_{x\to\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=0\to n=0 \end{array}\right\}\to \text{Asíntota oblicua en } y=x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x = -\sqrt{3}$, la función tiene un máximo, y en $x = \sqrt{3}$ un mínimo.

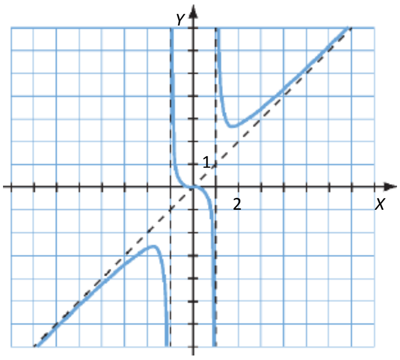
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ La función es convexa.

En $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ La función es cóncava.

En $x = 0$ tiene un punto de inflexión.



93. Página 261

a) • $1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2-4}{1-x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow (0, -4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-4}{1-x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-4}{1-x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-4}{1-x^2} = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-4}{1-x^2} = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = -1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-6x}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

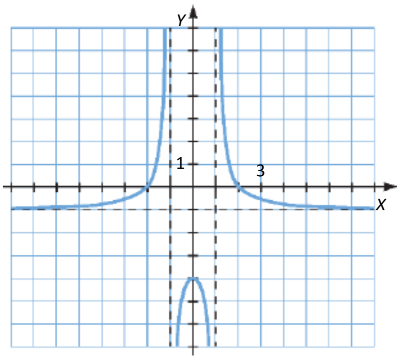
En $x = 0$ presenta un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0 \rightarrow \text{ No hay puntos de inflexión.}$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo $(-1, 1)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.



b) • $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = -\dfrac{1}{4} \rightarrow \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = -1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas, ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{6x}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$, $y'<0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(0,2)\cup(2,+\infty)$, $y'>0 \rightarrow$ Función creciente.

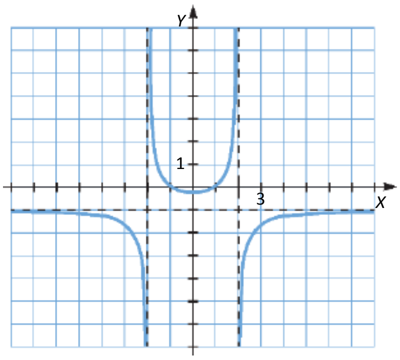
En $x=0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{-6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}\neq 0 \rightarrow \text{ No hay puntos de inflexión.}$$

En $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, $y''<0 \rightarrow$ Función convexa.

En el intervalo $(-2, 2)$, $y''>0 \rightarrow$ Función cóncava.



c) • $x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow \text{Dom } y=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

- Cortes con los ejes:

$y=0 \rightarrow \dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow (-2,0),(2,0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x=0 \rightarrow y=4 \rightarrow (0,4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=1\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=1\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x\rightarrow+\infty$ y cuando $x\rightarrow-\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y'=\frac{6x}{(x^2-1)^2}=0\rightarrow x=0$$

En $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, $y'<0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(0,1)\cup(1,+\infty)$, $y'>0 \rightarrow$ Función creciente.

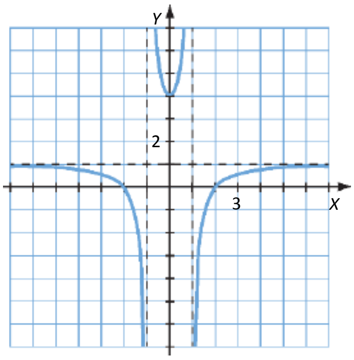
En $x=0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}\neq 0\rightarrow \text{No hay puntos de inflexión.}$$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y''<0$ → Función convexa.

En $(-1,1)$, $y''>0$ → Función cóncava.



d) • $4-x^2=0\rightarrow x=\pm 2\rightarrow \text{Dom } y=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

- Cortes con los ejes:

$y=0\rightarrow \frac{1-x^2}{4-x^2}=0\rightarrow x=\pm 1\rightarrow (-1,0),(1,0)$ son los puntos de corte con el eje X.

$x=0\rightarrow y=\frac{1}{4}\rightarrow \left(0,\frac{1}{4}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{1-x^2}{4-x^2}=\infty\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1-x^2}{4-x^2}=\infty\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1-x^2}{4-x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1-x^2}{4-x^2}=1\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x\rightarrow +\infty$ y cuando $x\rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

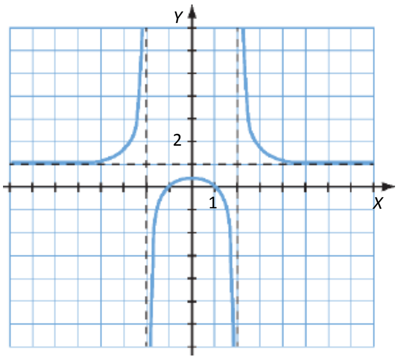
$$y'=\frac{-6x}{(x^2-4)^2}=0\rightarrow x=0$$

En $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$, $y'>0$ → Función creciente.

En $(0,2)\cup(2,+\infty)$, $y'<0$ → Función decreciente.

En $x=0$ presenta un máximo.

- Concavidad y convexidad:



$y'' = \dfrac{6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0 \to$ No hay puntos de inflexión.

En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo $(-2, 2)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

94. Página 261

a) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \to \dfrac{x}{x+2} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{x+2} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+2} = 1 \end{array} \right\} \to$ Asíntota horizontal en $y = 1$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

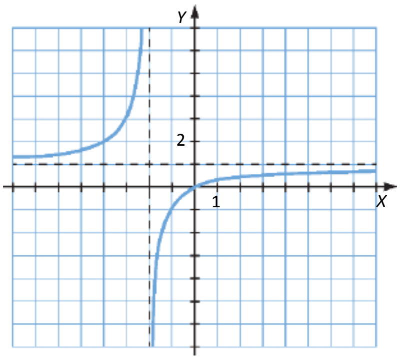
$y' = \dfrac{2}{(x+2)^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \to$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \dfrac{-4}{(x+2)^3} \neq 0 \to$ No hay puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -2)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo $(-2, +\infty)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.



b) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2}{x+2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+2x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{-2x}{x+2} \right) = -2 \rightarrow n = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x - 2.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

• Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

En $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(-4, -2) \cup (-2, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

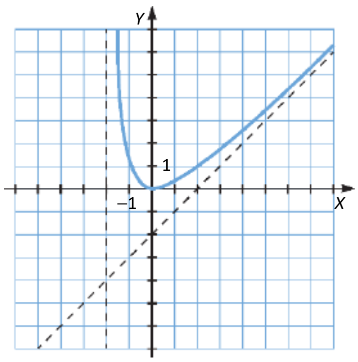
En $x = -4$, la función tiene un máximo, y en $x = 0$, un mínimo.

• Concavidad y convexidad:

$y'' = \frac{8}{(x+2)^3} \neq 0 \rightarrow$ No hay puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -2)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En el intervalo $(-2, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



c) • $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-2\}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{x+2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3}{x+2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x+2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x+2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 2x} = \infty \rightarrow$ No hay asíntotas oblicuas.

Tiene dos ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x+2} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x+2} = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, -3)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = -3$, la función tiene un mínimo.

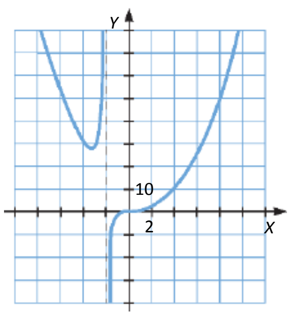
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2x\left(x^2 + 6x + 12\right)}{(x+2)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

En el intervalo (–2, 0), $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = 0$, la función tiene un punto de inflexión.



d) • Dom $y = \mathbb{R} - \{-2\}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x^3}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3}{(x+2)^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{(x+2)^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{(x+2)^2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x(x+2)^2} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{(x+2)^2} - x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-4x^2 - 4x}{(x+2)^2} = -4 \rightarrow n = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x - 4.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas oblicuas.

• Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

En $(-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En el intervalo $(-6, -2)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $x = -6$ la función tiene un máximo.

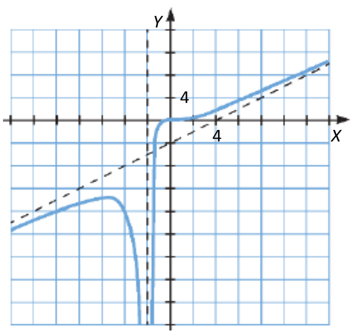
• Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{24x}{(x+2)^4} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = 0$, la función tiene un punto de inflexión.



95. Página 262

a) • $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

  $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

  No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \dfrac{-x+2}{x^3} = 0 \rightarrow x = 2$

  En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En el intervalo $(0, 2)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En $x = 2$ presenta un máximo.

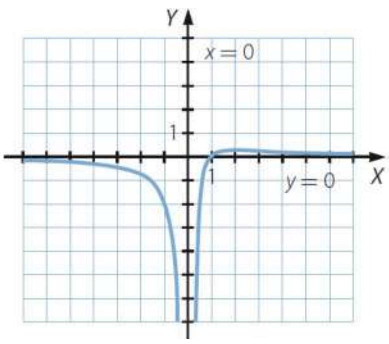
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \dfrac{2x-6}{x^4} = 0 \rightarrow x = 3$

  En $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

  En el intervalo $(3, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

  En $x = 3$ presenta un punto de inflexión.



b) • $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{3\}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-2}{x-3} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{2}{3} \rightarrow \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-3}=\infty \rightarrow$$ Asíntota vertical en $x = 3$.

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x-2}{x-3}=1 \rightarrow$$ Asíntota horizontal en $y = 1$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

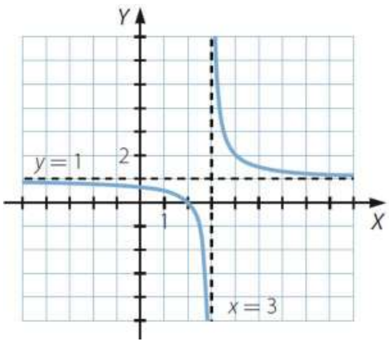
$$y'=\frac{-1}{(x-3)^2}<0 \rightarrow$$ La función es decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{2}{(x-3)^3}\neq 0 \rightarrow$$ No presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 3)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En el intervalo $(3, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



c) - $x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R}-\{-1\}$

- Cortes con los ejes:

$$y=0 \rightarrow \frac{x^2}{x+1}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0, 0)$$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{x+1}=\infty \rightarrow$$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty\end{array}\right\} \rightarrow$$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2}{x^2+x}=1 \rightarrow m=1\\ \lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-x}{x+1}=-1 \rightarrow n=-1\end{array}\right\} \rightarrow$$ Asíntota oblicua en $y = x - 1$.

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $(-2, -1) \cup (-1, +\infty)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

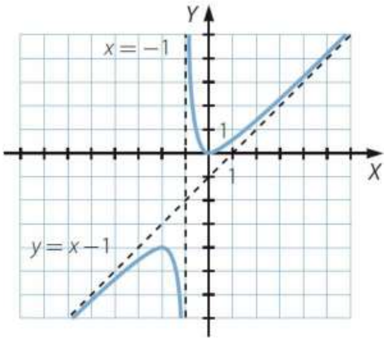
En $x = -2$ presenta un máximo, y en $x = 0$ un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \to \text{ No presenta puntos de inflexión.}$$

En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y'' < 0 \to$ Función convexa.

En el intervalo $(-1, +\infty)$, $y'' > 0 \to$ Función cóncava.



d) - Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$$y = 0 \to \frac{x}{x^2+1} = 0 \to x = 0 \to (0, 0) \text{ es el punto de corte con el eje } X.$$

$$x = 0 \to y = 0 \to (0, 0) \text{ es el punto de corte con el eje } Y.$$

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \to \text{ Asíntota horizontal en } y = 0.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-x^2+1}{(x+1)^2} = 0 \to x = \pm 1$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En el intervalo $(-1, 1)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $x = 1$ presenta un máximo y en $x = -1$, un mínimo.

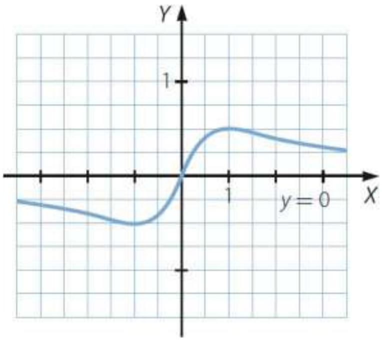
- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}=0\rightarrow x\left(2x^2-6\right)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

En $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$, $y''<0\rightarrow$ Función convexa.

En $\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$, $y''>0\rightarrow$ Función cóncava.

En $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ y $x=\sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.

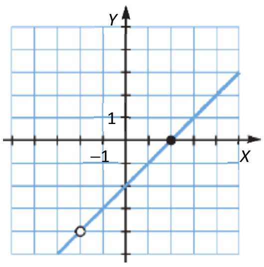


96. Página 262

a) $x+2=0\rightarrow x=-2\rightarrow \text{Dom}\,f=\mathbb{R}-\{-2\}\rightarrow a=-2$

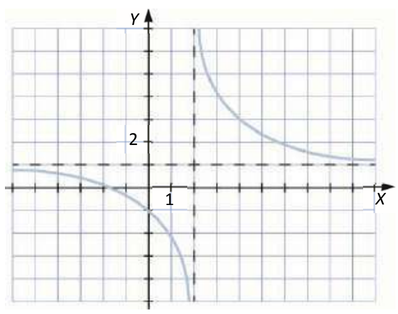
b) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}\rightarrow\frac{0}{0}\rightarrow\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}(x-2)=-4\rightarrow$ No tiene asíntota vertical en $x=-2$.

c)



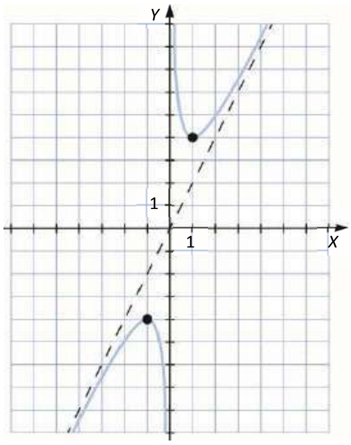
97. Página 262

Respuesta abierta. Por ejemplo:



98. Página 262

Respuesta abierta. Por ejemplo:



99. Página 262

a) • $2-x\geq 0\rightarrow x\leq 2\rightarrow \text{Dom } y=(-\infty, 2]$

- Cortes con los ejes:

  $y=0\rightarrow \sqrt{2-x}=0\rightarrow x=2\rightarrow (2,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x=0\rightarrow y=\sqrt{2}\rightarrow \left(0,\sqrt{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty\rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2-x}}{x}=0\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

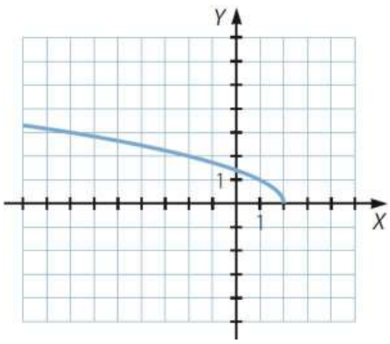
  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}<0\rightarrow$ Función siempre decreciente.

- Concavidad y convexidad:

  $y''=\dfrac{-1}{2(2-x)\sqrt{2-x}}<0\rightarrow$ Función siempre convexa.



b) • $1-\frac{x^2}{25}\geq 0 \rightarrow x\in[-5,5]\rightarrow \text{Dom } y=[-5,5]$

• Cortes con los ejes:

$\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}=0\rightarrow x^2-25=0\rightarrow x=\pm 5\rightarrow(-5,0),(5,0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x=0\rightarrow y=2\rightarrow(0,2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas.

• Crecimiento y decrecimiento:

$$y'=\frac{-4x}{10\sqrt{25-x^2}}=0\rightarrow x=0$$

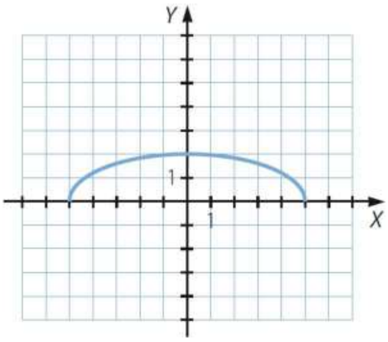
En el intervalo (–5, 0), $y'>0 \rightarrow$ Función creciente.

En el intervalo (0, 5), $y'<0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $x=0$ presenta un máximo.

• Concavidad y convexidad:

$y''=\frac{-100}{10(25-x^2)\sqrt{25-x^2}}<0\rightarrow$ Función convexa.



c) • $x^2-9\geq 0\rightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)\rightarrow \text{Dom } y=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

• Cortes con los ejes:

$\sqrt{x^2-9}=0\rightarrow x=\pm 3\rightarrow(-3,0),(3,0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida en $x=0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-9}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-9}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}=1\rightarrow m=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x}=0\rightarrow n=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota oblicua } y=x.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}=1\rightarrow m=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2-9}-x}=0\rightarrow n=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota oblicua } y=-x.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

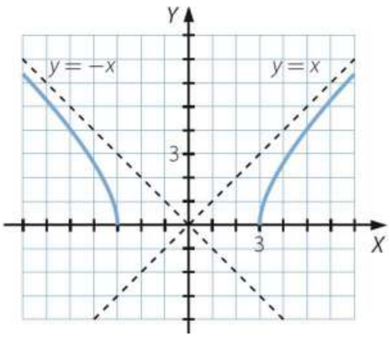
$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = 0 \rightarrow x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, -3)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(3, +\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{-9}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}} < 0 \rightarrow \text{ Función siempre convexa.}$$



d) • $x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow x \in [-3, +\infty) \rightarrow \text{Dom } y = [-3, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

$-\sqrt{x+3} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = -\sqrt{3} \rightarrow \left(0, -\sqrt{3}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{x+3}\right) = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{x+3}}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

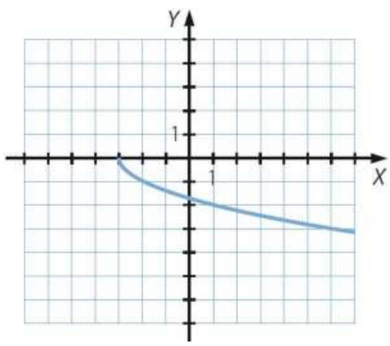
$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{x+3}\right) = -\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{x+3}} < 0 \rightarrow \text{ Función siempre decreciente.}$$

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{-1}{4(x+3)\sqrt{x+3}} > 0 \rightarrow \text{ Función siempre cóncava.}$$



100. Página 262

a) $x^2+3x\geq 0\rightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)\rightarrow \text{Dom}\, f=(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$

Cortes con el eje *X*: $\sqrt{x^2+3x}-x=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$

Corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow(0,0)$

b) No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\dfrac{3}{2}\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=\dfrac{3}{2}$.

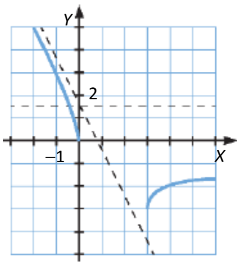
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\rightarrow \text{Tiene asíntota oblicua en } y=-2x+\dfrac{3}{2}.$$

c) $f'(x)=\dfrac{2x+3-2\sqrt{x^2+3x}}{2\sqrt{x^2+3x}}\neq 0\ \forall x\in \text{Dom}\, f\rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

En el intervalo $(-\infty,-3)$, $f'(x)<0\rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(0,+\infty)$, $f'(x)>0\rightarrow$ Función creciente.

d)



101. Página 262

a) $x^2+3x\geq 0\rightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)\rightarrow \text{Dom}\, f=(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$

Cortes con el eje *X*: $\sqrt{x^2+3x}-2x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}\rightarrow(0,0),(1,0)$

Corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow(0,0)$

b) No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-3x^2}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{3}=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-3x^2}{x\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y=-x+\dfrac{3}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2x}{x}=-3\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+3x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y=-3x-\dfrac{3}{2}.$$

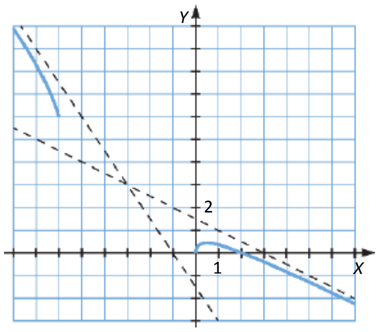
c) $f'(x)=\dfrac{2x+3-4\sqrt{x^2+3x}}{2\sqrt{x^2+3x}}=0\rightarrow x=\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}$

En $(-\infty,-3)\cup\left(\sqrt{3}-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$, $f'(x)<0\rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $\left(0,\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\right)$, $f'(x)>0\rightarrow$ Función creciente.

En $x=\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}$ $f(x)$ tiene un máximo.

d)



102. Página 262

Gráfica 1: $f(x)=\sqrt{25-x^2}$

Gráfica 2: $g(x)=-3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$

Gráfica 3: $h(x)=\sqrt{x-1}$

Gráfica 4: $j(x)=\sqrt{x^2-4}$

103. Página 262

a) • Dom $y=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $xe^x=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x=0\rightarrow y=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x)=+\infty\rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-x}}\right)\rightarrow\dfrac{\infty}{\infty}\rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-x}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{-e^{-x}}\right)=0\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=0$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x}{x}=+\infty\rightarrow$ No hay asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x)=+\infty$

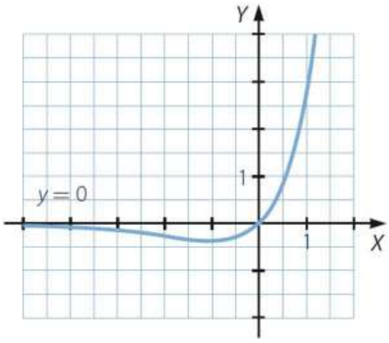
- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = e^x(1+x) = 0 \rightarrow x = -1$

  En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

  En el intervalo $(-1, +\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

  En $x = -1$ presenta un mínimo.



- Concavidad y convexidad:

  $y'' = e^x(1+x) + e^x = 0 \rightarrow x = -2$

  En el intervalo $(-\infty, -2)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

  En el intervalo $(-2, +\infty)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

  En $x = -2$ presenta un punto de inflexión.

b) • $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = 0 \rightarrow \dfrac{1}{e^x} + e^x \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje X.

  $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{1+1}{2} = 1 \rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No hay asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = +\infty$

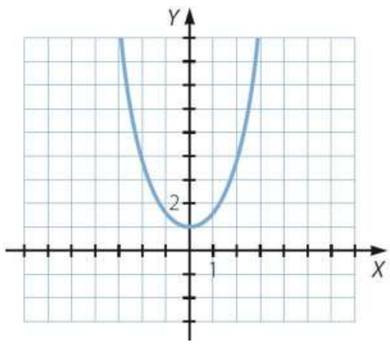
- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \dfrac{-e^{-x}+e^x}{2} = 0 \rightarrow e^{-x} = e^x \rightarrow -x = x \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

  En $x = 0$ presenta un mínimo.



- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} > 0 \rightarrow$ Función siempre cóncava.

c) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $3x^2e^{-x} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

  $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2e^{-x}) = 0 \to$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

  $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^2e^{-x}) = +\infty \to$ No hay asíntota horizontal.

  $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2e^{-x}}{x} = -\infty \to$ No tiene asíntota oblicua.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^2e^{-x}) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = e^{-x}(6x - 3x^2) = 0 \to 3x(2 - x) \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

  En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

  En el intervalo $(0, 2)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

  En $x = 0$ presenta un mínimo y en $x = 2$ un máximo.

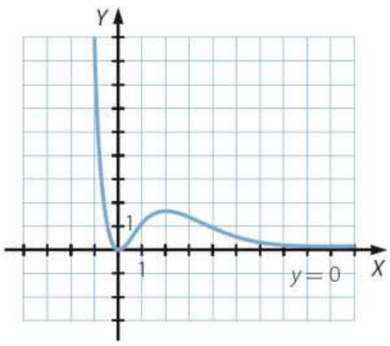
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = e^{-x}(3x^2 - 12x + 6) = 0 \to x = 2 \pm \sqrt{2}$

  En $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$, $y'' > 0 \to$ Función cóncava.

  En $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, $y'' < 0 \to$ Función convexa.

  En $x = 2 \pm \sqrt{2}$ presenta dos puntos de inflexión.



d) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $\dfrac{x^2 - 1}{e^{x^2}} = 0 \to x = \pm 1 \to (1, 0), (-1, 0)$ son los puntos de corte con el eje X.

  $x = 0 \to y = -1 \to (0, -1)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{e^{x^2}}\right)=0\to$ Asíntota horizontal en $y=0$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y'=\frac{2x-(x^2-1)2x}{e^{x^2}}=\frac{4x-2x^3}{e^{x^2}}=0\to x(4-2x^2)=0\to\begin{cases}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

En $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$, $y'>0\longrightarrow$ Función creciente.

En $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$, $y'<0\longrightarrow$ Función decreciente.

En $x=\pm\sqrt{2}$ presenta dos máximos y en $x=0$, un mínimo.

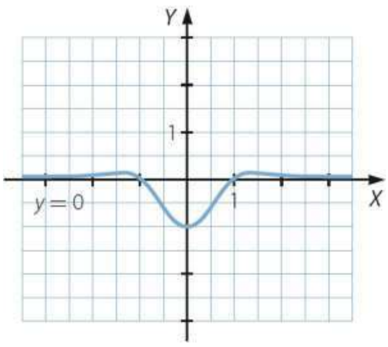
- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{4x^4-14x^2+4}{e^{x^2}}=0\to\begin{cases}x=\pm0{,}56\\x=\pm1{,}78\end{cases}$$

En $(-\infty;-3{,}17)\cup(-0{,}56;0{,}56)\cup(3{,}17;+\infty)$, $y''>0\longrightarrow$ Función cóncava.

En $(-3{,}17;-0{,}56)\cup(0{,}56;3{,}17)$, $y''<0\longrightarrow$ Función convexa.

En $x=\pm3{,}17$ y en $x=\pm0{,}56$ presenta puntos de inflexión.



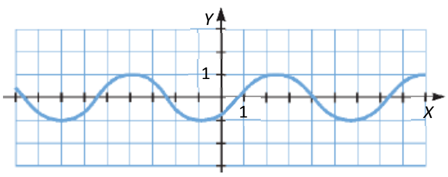
e) - $\text{Dom } y=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\to x=k\pi+\frac{\pi}{4}\to\left\{\left(k\pi+\frac{\pi}{4},0\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ son los puntos de corte con el eje X.

$x=0\to y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\to\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

Es la función $sen\,x$ trasladada $\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha.



f) • Dom $y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$x^2 - sen^2 x = 0 \rightarrow x = sen\ x \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 - sen^2 x) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2 - sen^2 x}{x} \rightarrow \dfrac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2 - sen^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x - 2\ sen\ x\ \cos x}{1} = \infty \rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

Tiene dos ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - sen^2 x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 - sen^2 x) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = -2\ sen\ x\ cos\ x + 2x = 0 \rightarrow x = 0$

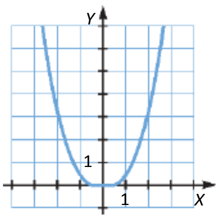
En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

• Concavidad y convexidad:

$y'' = 2\ sen^2 x - 2\cos^2 x + 2 \geq 0 \rightarrow$ Función siempre cóncava.



104. Página 262

a) • Dom $y = (0, +\infty)$

• Cortes con los ejes:

$x \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida para $x = 0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightarrow \dfrac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x \ln x) = +\infty \rightarrow$ No hay asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x \ln x) = +\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = \ln x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{e}$

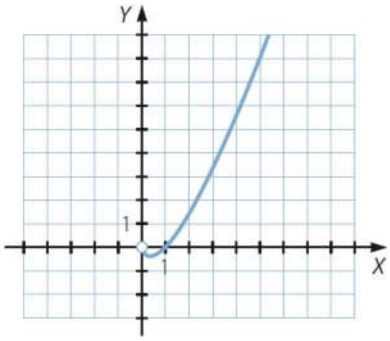
En $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $x = \frac{1}{e}$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \frac{1}{x} > 0 \rightarrow$ Función siempre cóncava.



b) • $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$\log_2(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\log_2(x^2+1)\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\log_2(x^2+1)\right) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log_2(x^2+1)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\log_2(x^2+1)\right) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\log_2(x^2+1)\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = \frac{2x}{\ln 2(x^2+1)} = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

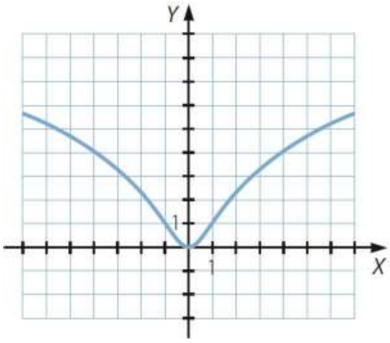
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2-2x^2}{\ln 2(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(-1,1)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = \pm 1$ presenta dos puntos de inflexión.



c) • $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No hay asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} - x\right) = -\ln 2 = -0{,}69 \rightarrow n = -0{,}69 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x - 0{,}69.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{x} = 1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} + x\right) = -\ln 2 = -0{,}69 \rightarrow n = -0{,}69 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = -x - 0{,}69.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntotas oblicuas.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{2\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)}{e^x + e^{-x}} = 0 \to e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \to e^{2x} = 1 \to x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

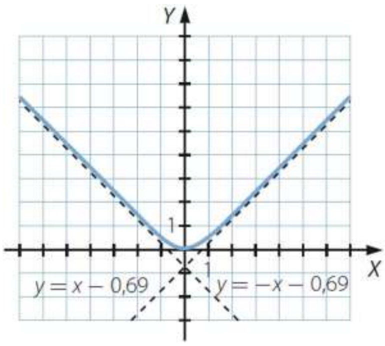
En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{4}{e^{-2x} + 2 + e^{2x}} > 0 \to \text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



d) - Dom $y = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

$\frac{x}{\ln x} = 0 \to x = 0 \to$ No tiene puntos de corte con el eje X porque no está definida para $x = 0$.

No tiene punto de corte con el eje Y porque no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0 \to$ No tiene asíntota vertical.

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \to$ No hay asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x \ln x} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \to \ln x = 1 \to x = e$$

En $(0, 1) \cup (1, e)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En el intervalo $(e, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $x = e$ presenta un mínimo.

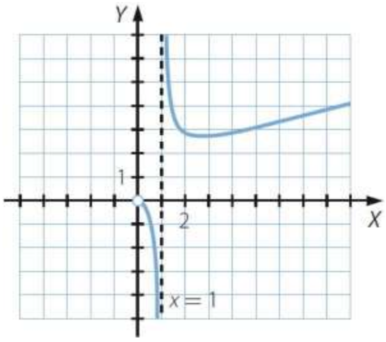
- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}=0\rightarrow \ln x=2\rightarrow x=e^2$$

• En $(0,1)\cup(e^2,+\infty)$, $y''<0\longrightarrow$ Función convexa.

• En $(1,e^2)$, $y''>0\longrightarrow$ Función cóncava.

En $x=e^2$ presenta un punto de inflexión.



105. Página 262

a) • $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}-\{0\}$

- Cortes con los ejes:

$e^{\frac{2}{x}}\neq 0\rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje *X*.

No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida en $x=0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{2}{x}}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{x}}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{2}{x}}=1\\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{2}{x}}=1\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

- Crecimiento y decrecimiento:

$y'=-2\cdot\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}<0\rightarrow$ Función decreciente en todo su dominio.

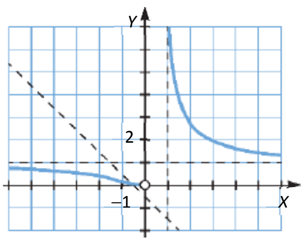
- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{4xe^{\frac{2}{x}}+4e^{\frac{2}{x}}}{x^4}=0\rightarrow x=-1$$

En $(-1,0)\cup(0,+\infty)$, $y''>0\longrightarrow$ Función cóncava.

En $(-\infty,-1)$, $y''<0\longrightarrow$ Función convexa.

En $x=-1$ presenta un punto de inflexión.



b) • Dom $y=\mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0\rightarrow y=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No hay asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=0.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x\cdot e^{-x}=-\infty\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}=+\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$$y'=\frac{2xe^{-x}-x^2e^{-x}}{2}\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$, $y'<0\rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(0,2)$, $y'>0\rightarrow$ Función creciente.

En $x=0$ presenta un mínimo y en $x=2$ un máximo.

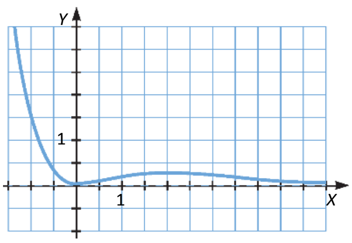
• Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{-4xe^{-x}+x^2e^{-x}+2e^{-x}}{2}=0\rightarrow x=2\pm\sqrt{2}$$

En $\left(-\infty,2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2},+\infty\right)$, $y''>0\rightarrow$ Función cóncava.

En $\left(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$, $y''<0\rightarrow$ Función convexa.

En $x=2\pm\sqrt{2}$ presenta dos puntos de inflexión.



c) • Dom $y=\mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$2x\cdot e^{-x}=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0\rightarrow y=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No hay asíntotas verticales.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\cdot e^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2x\cdot e^{-x}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{Asíntota horizontal en } y=0.$$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{-x}=-\infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x\cdot e^{-x}=-\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y'=-2xe^{-x}+2e^{-x}=-2e^{-x}(x-1)=0\to x=1$

  En el intervalo $(1, +\infty)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

  En el intervalo $(-\infty, 1)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

  En $x = 1$ presenta un máximo.

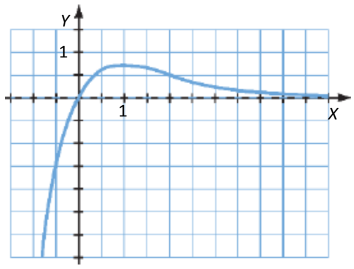
- Concavidad y convexidad:

  $y''=2xe^{-x}-4e^{-x}=2e^{-x}(x-2)=0\to x=2$

  En $(2,+\infty)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

  En $(-\infty,2)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

  En $x = 2$ presenta un punto de inflexión.



d) • $\text{Dom } y=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $(x-2)^2\cdot e^x=0\to x=2\to(2,0)$ es el punto de corte con el eje X.

  $x=0\to y=4\to(0,4)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No hay asíntotas verticales.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-2)^2\cdot e^x\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-2)^2\cdot e^x\right]=0\end{array}\right\}\to \text{Asíntota horizontal en } y=0.$$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-2)^2\cdot e^x}{x}=+\infty\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-2)^2\cdot e^x\right]=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y'=-2xe^x+x^2e^x=xe^x(x-2)=0\to\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$

  En el intervalo $(0,2)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

  En $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

  En $x = 0$ presenta un máximo y en $x = 2$ un mínimo.

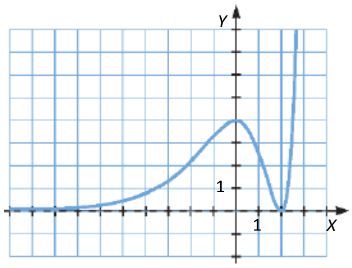
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = x^2e^x - 2e^x = e^x(x^2-2) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

En $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = \pm\sqrt{2}$ presenta un punto de inflexión.



106. Página 263

a) $f(0) = a \cdot 0 - 2^0 = -1 \rightarrow$ El punto (0, –1) pertenece a la gráfica de la función para todo valor del parámetro *a*.

b) $a < 0 \rightarrow f'(x) = a - 2^x \ln 2 < 0 \rightarrow$ La función es decreciente.

c) $f(2) = 0 \rightarrow 2a - 2^2 = 2a - 4 = 0 \rightarrow a = 2 \rightarrow f(x) = 2x - 2^x$

$$f'(x) = 2 - 2^x \ln 2 = 0 \rightarrow 2^x = \frac{2}{\ln 2} \rightarrow x = \log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$$

En $\left(-\infty, \log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)\right)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente. En $\left(\log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right), +\infty\right)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $x = \log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$ presenta un máximo.

107. Página 263

a) $f(\sqrt{2}) = 1 \rightarrow a + \ln\left((\sqrt{2})^2 - 1\right) = a + \ln 1 = a \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = 1 + \ln(x^2 - 1)$

b) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow$ $\text{Dom} f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \left(1 + \ln(x^2 - 1)\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(1 + \ln(x^2 - 1)\right) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = -1 \text{ y en } x = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \ln(x^2 - 1)\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \ln(x^2 - 1)\right) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No hay asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \ln(x^2 - 1)}{x} = 0 \rightarrow \text{No hay asíntotas oblicuas.}$$

Hay dos ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \ln(x^2 - 1)\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \ln(x^2 - 1)\right) = +\infty$

c) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}=0 \to x=0 \notin \text{Dom} f$

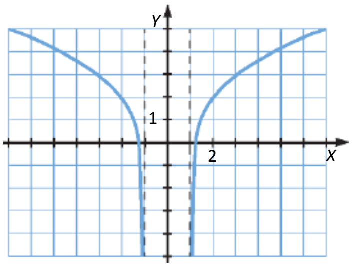
En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y'<0 \to$ Función decreciente.

En el intervalo $(1, +\infty)$, $y'>0 \to$ Función creciente.

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x)=\dfrac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0 \to$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

d)



108. Página 263

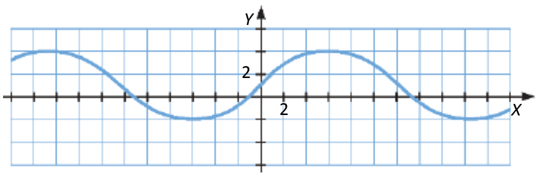
a) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3 \to 1+a\cdot sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1+a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3 \to a=2\sqrt{2} \to f(x)=1+2\sqrt{2}\cdot sen\left(\dfrac{x}{4}\right)$

b) Podemos obtener la gráfica de la función a partir de la función $sen\, x$.

$sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$ es una dilatación en el eje *X* de la función $sen\, x$, que recorre los mismos valores pero el «doble de lento», es decir, tendrá período 4π y está acotada entre –1 y 1.

$2\sqrt{2}\cdot sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ es una dilatación en el eje *Y* de la gráfica anterior. Ahora estará acotada entre $-2\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$:

Por último, la función $f(x)=1+2\sqrt{2}\cdot sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ es una traslación de una unidad hacia arriba de la gráfica anterior:



109. Página 263

a) • $\text{Dom} f=\mathbb{R}$

• Continuidad:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(4x+x^2)=5=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+3)=f(1) \to$ Es continua en $x=1$ y, por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

• Cortes con los ejes:

$f(x)=0 \to 4x+x^2=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases} \to$ (0, 0) y (–4, 0) son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0)=0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Las funciones de los dos trozos son polinómicas; por lo tanto, no tienen asíntotas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim_{x\to-\infty}(4x+x^2)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=\begin{cases}4+2x & \text{si } x<1\\ 2 & \text{si } 1<x\end{cases}\to f'(x)=0\to x=-2$

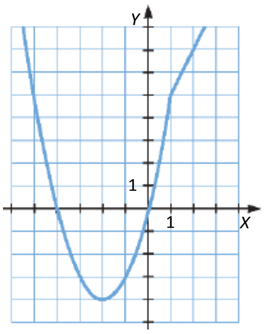
  En $(-2,1)\cup(1,+\infty)$, $f'(x)>0\to f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(-\infty,-2)$, $f'(x)<0\to f(x)$ es decreciente.

  En $x=-2$ presenta un mínimo.

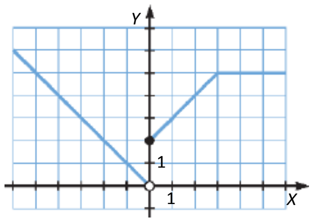
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<1\\ 0 & \text{si } 1<x\end{cases}\to$ La función es cóncava en el primer tramo.



b) $\text{Dom} f=\mathbb{R}-\{3\}$

Las funciones de los distintos tramos de la función son lineales. Representamos las diferentes funciones en sus respectivos dominios:



c) - $\text{Dom} f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

  $\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\sqrt{2-x}=2=\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}(6-x^2)=f(-2)\to$ La función es continua en $x=-2$ y, por lo tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0\to 6-x^2=0\to x=\pm\sqrt{6}\to(\sqrt{6},0)$ es el punto de corte con el eje X.

  $f(0)=0\to(0,6)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Tiene dos ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2-x} = +\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(6-x^2\right) = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} & \text{si} \quad x < -2 \\ -2x & \text{si} \quad -2 < x \end{cases} \to f'(x) = 0 \to x = 0$$

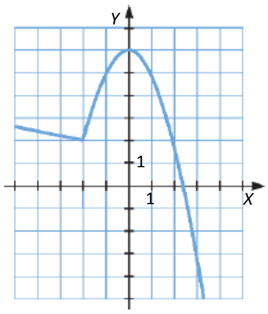
  En el intervalo $(-2, 0)$, $f'(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

  En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

  En $x = -2$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{4\sqrt{2-x}\,(2-x)} & \text{si} \quad x < -2 \\ -2 & \text{si} \quad -2 < x \end{cases} \to f''(x) < 0 \to$$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



d) - $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Continuidad:

  Cada una de las tres funciones son continuas en sus respectivos dominios. Veamos si son continuas en $x = -1$ y en $x = 2$:

  $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \left(x^2 + 3x\right) = -2 = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \left(x^3 - 1\right) = f(-1) \to$ Es continua en $x = -1$.

  $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \left(x^3 - 1\right) = 7 = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{7}{x-1} = f(2) \to$ Es continua en $x = 2$.

  La función es continua en todo su dominio.

- Cortes con los ejes:

  $$f(x) = 0 \to \begin{cases} x^2 + 3x = x(x+3) = 0 \to x = -3 \\ x^3 - 1 = 0 \to x = 1 \end{cases} \to (-3, 0), (1, 0)$$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = -1 \to (0, -1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7}{x-1} = 0 \to$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 + 3x\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si} \quad x<-1\\ 3x^2 & \text{si} \quad -1<x<2\\ \dfrac{-7}{(x-1)^2} & \text{si} \quad 2<x\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2x+3=0\rightarrow x=-\dfrac{3}{2}\\ 3x^2=0\rightarrow x=0\end{cases}$$

En $\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,2)$ $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(2,+\infty)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x=-\frac{3}{2}$ presenta un mínimo.

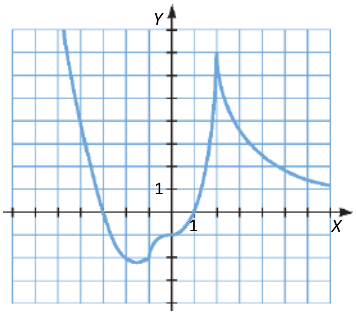
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad x<-1\\ 6x & \text{si} \quad -1<x<2\\ \dfrac{14}{(x-1)^3} & \text{si} \quad 2<x\end{cases} \rightarrow 6x=0\rightarrow x=0$$

En $(-\infty,-1)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$, $f''(x)>0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(-1,0)$, $f''(x)<0 \rightarrow$ Función convexa

En $x=0$ y en $x=-1$ presenta puntos de inflexión.



e) - $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

Cada una de las dos funciones son continuas en sus respectivos dominios, veamos si son continuas en $x=0$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2-3\cos x)=-1=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2^{-x+1}-3\right)=-1=f(0)\rightarrow$ La función es continua en su dominio.

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\rightarrow 2-3\cos x=0\rightarrow x=\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\rightarrow\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right),0\right)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0)=-1\rightarrow(0,-1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

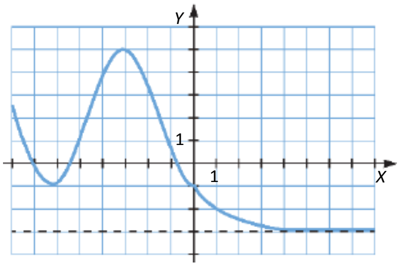
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{-x+1}-3\right)=-3\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=-3$.

Podemos representar la función $-3\cos x$ como una dilatación de la función $-\cos x$, y la función $2-3\cos x$, como una traslación de la anterior.

Si consideramos $g(x)=2^{-x+1}-3$:

$g'(x)=-2^{-x+1}\ln 2<0 \rightarrow$ **$g(x)$** es siempre decreciente.

$g''(x)=2^{-x+1}(\ln 2)^2>0 \rightarrow$ **$g(x)$** es siempre cóncava.



110. Página 263

a)
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(ax+3)=3-a=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(bx^2+5\right)=b+5 \rightarrow b=-a-2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(bx^2+5\right)=b+5=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2\sqrt{x+3}+a\right)=4+a \rightarrow b=a-1\end{array}\right\} \rightarrow a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2}$$

Entonces:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x+3 & \text{si } x\leq -1\\ -\dfrac{3}{2}x^2+5 & \text{si } -1<x\leq 1\\ 2\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{2} & \text{si } 1<x\end{cases}$$

b) La primera función es una recta con pendiente $m=-\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen $n=3$.

La segunda función es una parábola hacia abajo con vértice (0, 5).

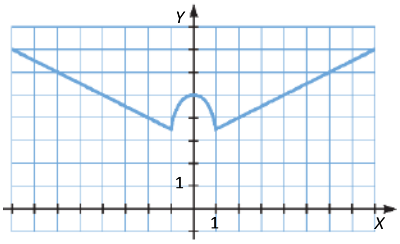
Si llamamos $g(x)=2\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}$:

$g(x)$ tiene una rama parabólica:

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(2\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}\right)=+\infty$$

$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}>0 \rightarrow$ **$g(x)$** es creciente y no tiene máximos ni mínimos.

$g''(x)=\dfrac{-1}{2(x+3)\sqrt{x+3}}<0 \rightarrow$ **$g(x)$** es convexa en su dominio.



111. Página 263

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(x^2 + ax + a - 1\right) = 3 + 3a = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (\log_2(x-1)) = 0 \to a = -1 \to f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ \log_2(x-1) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

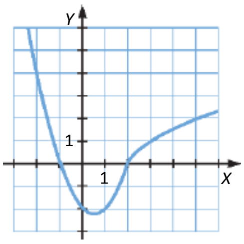
La función del primer tramo es una parábola hacia arriba con vértice en $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ que corta al eje X en los puntos (–1, 0) y (2, 0), y al eje Y en el punto (0, –2).

Si llamamos $g(x)$ a la función del segundo tramo:

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} (\log_2 (x-1)) = +\infty \to$ Rama parabólica.

$g'(x) = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2} > 0 \ \forall x \in \text{Dom } g \to$ Función siempre creciente.

$g''(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2 \ln 2} < 0 \to$ Función convexa en todo su dominio.



La imagen o recorrido de la función será el intervalo $\left(-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

112. Página 263

a) Las funciones de cada tramo son continuas y derivables en sus respectivos dominios. Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

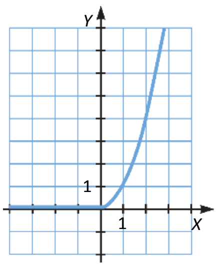
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (a \cdot \operatorname{sen} x + b) = b = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 - ax\right) = 0 \to b = 0$$

Usamos la definición de derivada para estudiar la derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} h - (a \operatorname{sen} 0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} h}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{a \cdot \cos h}{1} = a \\ \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{h^2 - ah - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} (h - a) = -a \end{array}\right\} \to a = -a \to a = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 < x \end{cases}$$

b)



113. Página 263

a) La función del primer tramo es una función irracional que no tiene asíntotas. Estudiamos las asíntotas oblicuas de la función del segundo tramo:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-mx}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x-m}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2mx}{x-m}\right)=2m\end{array}\right\}\to \text{Asíntota oblicua en } y=2x+2m\to 2m=6\to m=3.$$

b) $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{2-x} & \text{si } \ x\le 1\\ \dfrac{2x^2}{x-3} & \text{si } \ 1<x\end{cases}$

- $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{3\}$
- Continuidad:

  Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

  $$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=0\ne\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2}{x-3}=-1\to \text{No es continua en } x=1.$$

- Cortes con los ejes:

  $1-\sqrt{2-x}=0\to x=1\to(1,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0)=1-\sqrt{2}\to\left(0,1-\sqrt{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2}{x-3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x^2}{x-3}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{Asíntota vertical en } x=3.$$

  Por el apartado a), sabemos que $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$; veamos qué sucede cuando $x\to-\infty$:

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=+\infty\to$ No hay asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{x}=0\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{x}=0\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Hay una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} & \text{si } \ x\le1\\ \dfrac{2x(x-6)}{(x-3)^2} & \text{si } \ x>1\end{cases}\to f'(0)\to x=6$$

  En $(-\infty,1)\cup(6,+\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

  En $(1,3)\cup(3,6)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

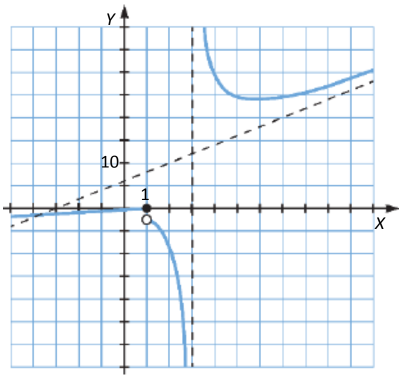
  En $x = 6$ hay un mínimo: $f(6)=24\to(6,24)$

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{2-x}\,(2-x)} & \text{si} \quad x\le 1\\[2mm] \dfrac{36}{(x-3)^3} & \text{si} \quad x>1\end{cases} \rightarrow f''(0)\neq 0 \rightarrow \text{No hay puntos de inflexión.}$$

En $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$, $f''(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es cóncava.

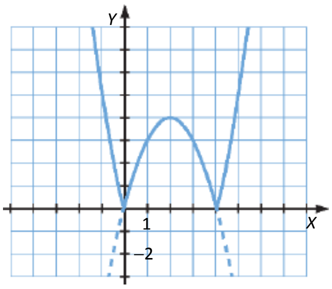
En $(1,3)$, $f''(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es convexa.



$\text{Im}\, f=(-\infty,0)\cup(24,+\infty)$

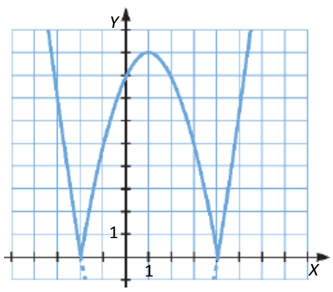
114. Página 263

La función que está dentro del valor absoluto es una parábola hacia abajo con vértice en el punto $V(2,4)$ que corta a los ejes en los puntos (0,0) y (4,0). Por lo tanto, debemos representar la función que está dentro del valor absoluto, y realizar una simetría respecto del eje *X* de los puntos que quedan por debajo del eje *X*.



115. Página 263

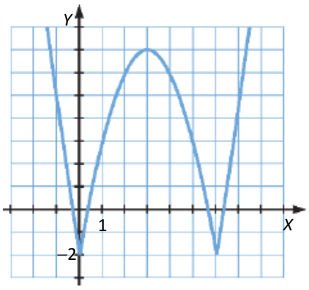
a) La función de dentro del valor absoluto es una parábola hacia arriba con vértice en el punto $V(1,-9)$ que corta a los ejes en los puntos (–2, 0), (4, 0) y (0, –8). Por lo tanto, debemos representar la función de dentro del valor absoluto, y realizar una simetría respecto del eje *X* de los puntos que quedan por debajo del eje *X*.



b) Podemos expresar la función *f*(*x*) como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}6x-x^2-2 & \text{si} \quad x\in[0,6]\\ x^2-6x-2 & \text{si} \quad x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty)\end{cases}$$

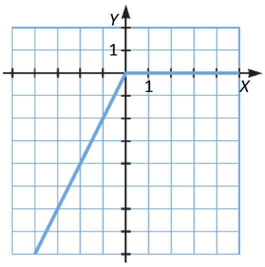
La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice en el punto $V(3,7)$ que corta a los ejes en los puntos $\left(3-\sqrt{7},0\right)$, $\left(3+\sqrt{7},0\right)$ y $(0,-2)$. La función del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice en el punto $V(3,-11)$ que corta a los ejes en los puntos $\left(3-\sqrt{11},0\right)$, $\left(3+\sqrt{11},0\right)$ y $(0,-2)$. Por lo tanto, representamos cada función en su respectivo dominio.



c) Podemos expresar la función *f*(*x*) como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{si} \quad x\le 0\\ 0 & \text{si} \quad 0<x\end{cases}$$

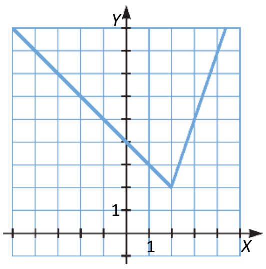
La función del primer tramo es una recta con pendiente 2 que pasa por el origen de coordenadas. La segunda es la función nula. Representamos cada función en su respectivo dominio.



d) Podemos expresar la función *f*(*x*) como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}4-x & \text{si} \quad x\le 2\\ 3x-4 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

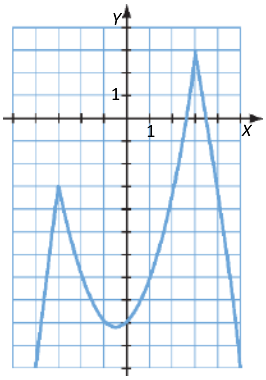
La función del primer tramo es una recta con pendiente –1 que pasa por el punto (0, 4). La segunda es una recta de pendiente 3 y que pasa por (0, –4). Representamos cada función en su respectivo dominio.



e) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} x+9-x^2 & \text{si} \quad x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty) \\ x-9+x^2 & \text{si} \quad x\in(-3,3) \end{cases}$$

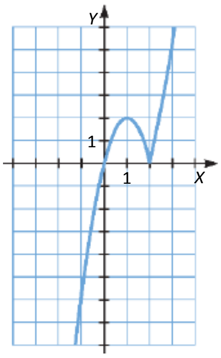
La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice $V\left(\frac{1}{2},\frac{37}{4}\right)$ y corta los ejes en los puntos $\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2},0\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{37}}{2},0\right)$ y $(0,9)$. La del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice $V\left(\frac{-1}{2},\frac{-37}{4}\right)$ y corta a los ejes en los puntos $\left(\frac{-1+\sqrt{37}}{2},0\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{37}}{2},0\right)$ y $(0,-9)$. Representamos cada función en su respectivo dominio.



f) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} 4x-2x^2 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x^2-4x & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}$$

La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice $V(1,2)$ y corta los ejes en los puntos (0, 0) y (2, 0). La del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice $V(1,-2)$ y corta los ejes en los puntos (0, 0) y (2, 0). Representamos cada función en su dominio.



116. Página 263

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+5x+6 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2-5x+6 & \text{si} \quad 0<x \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2+5h+6-(6)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2+5h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(h+5)=5 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-5h+6-(6)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-5h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(h-5)=-5 \end{array}\right\} \to \text{La función no es derivable en } x=0.$$

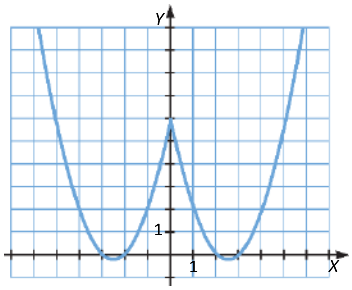
b) $f'(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{si } x<0\\ 2x-5 & \text{si } 0<x\end{cases}\to f'(0)=0\to\begin{cases}2x+5=0\to x=\dfrac{-5}{2}\\ 2x-5=0\to x=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

En $\left(-\infty,\dfrac{-5}{2}\right)\cup\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$, $f'(x)<0\to f(x)$ es decreciente.

En $\left(\dfrac{-5}{2},0\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$, $f'(x)>0\to f(x)$ es creciente.

En $x=\pm\dfrac{5}{2}$ presenta dos mínimos.

c)



117. Página 263

a) Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

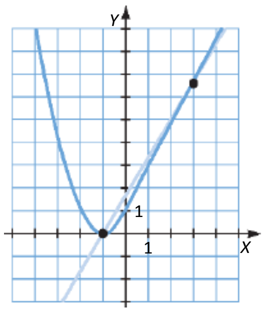
$$\left.\begin{aligned}&\lim_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{1+a\sqrt{h+1}\cdot\ln(h+1)-(1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\left[a\frac{\ln(h+1)}{h}\right]=\lim_{h\to0^-}\left[a\frac{\frac{1}{h+1}}{1}\right]=a\\&\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{(h+1)^2-(1)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0^-}(h+2)=2\end{aligned}\right\}\to a=2$$

Es decir, $f(x)$ es derivable en $x=0$ si $a=2$.

b) La función es continua en [–1, 3] y derivable en (–1, 3). Entonces, existe $c\in(-1,3)$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{1+4\ln4-0}{4}=\frac{1+4\ln4}{4}$$

c)



Por el teorema de Lagrange, existe $c\in(-1,3)$ tal que la tangente en la curva en $x=c$ es paralela a la recta que une los puntos (–1, 0) y (3, 1 + 4 ln 4).

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 264

Respuesta abierta.

2. Página 264

30 puntos, ya que conocemos los dos extremos.

3. Página 264

No, existen infinitas funciones que pasan por dos puntos dados del plano. Por ejemplo, hay infinitas funciones polinómicas que pasan por dos puntos dados.

4. Página 264

La ecuación general de una función polinómica de grado *n* es: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Como tenemos que hallar $n + 1$ coeficientes, necesitaremos $n + 1$ puntos.