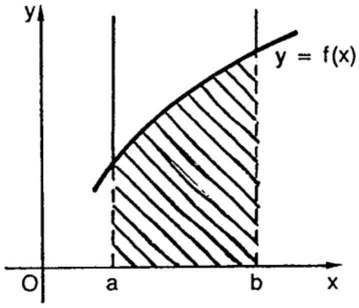
<u>ÁREA BAJO UNA CURVA. INTEGRAL DEFINIDA.</u>

En cursos anteriores aprendimos a calcular el área de distintas figuras geométricas elementales, recintos cerrados limitados por segmentos de recta y arcos de circunferencia. En lo que sigue trataremos de determinar el valor del área de una figura plana limitada por dos o más arcos de curva.
Si f es una función continua en el intervalo [a, b], el **<u>área</u>** contenida entre el eje X, la gráfica de la función f y las rectas verticales x=a y x=b, se designa por: $\int_a^b f$ (se lee **<u>integral definida de la función f en [a, b] ó integral entre a y b de f.</u>** Los números **a** y **b** se llaman límites **<u>inferior</u>** y **<u>superior</u>** de integración, respectivamente).

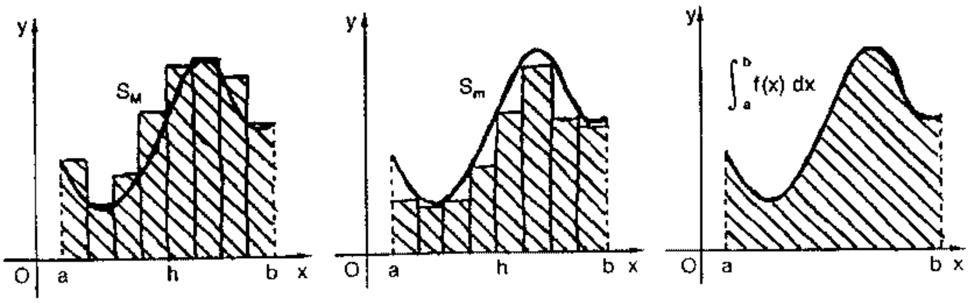


En lugar de poner sólo la función, se puede poner (y se acostumbra a hacerlo):

$$\int_a^b f(x)dx$$

<u>Ejemplos</u>: $\int_2^6 3dx =$ $\int_2^5 (6-x)dx =$

En general, para una función cualquiera y=f(x) continua y positiva en el intervalo [a,b]:
Dividimos el intervalo [a,b] en n subintervalos de igual amplitud h. En cada subintervalo la función f(x) alcanzará un máximo y un mínimo absolutos (mayor y menor valor de la función en el subintervalo).
Si en cada subintervalo se traza una paralela al eje OX por cada máximo absoluto y por cada mínimo absoluto, se obtienen n rectángulos exteriores y n rectángulos interiores.
Llamemos S_M a la suma de las áreas de todos los rectángulos exteriores y S_m a la suma de las áreas de todos los rectángulos interiores.



Tal y como se aprecia en las figuras anteriores, la integral definida está comprendida entre ambos valores:

$$S_m \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_M$$

Ahora bien, haciendo las subdivisiones de amplitud menor, dichas áreas se van aproximando cada vez más a la integral. De esta forma (intuitiva) podríamos decir que en el límite cuando la amplitud h tiende a cero, se cumple:

$$\lim_{h\to 0} S_M = \int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} S_m$$

(Se ha considerado f(x)≥0, ∀x∈[a,b]. También es válido para el caso de una función negativa).

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Las siguientes propiedades son consecuencia inmediata de la definición.

1. Si c es un punto interior de [a, b], entonces:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2. Si a=b, entonces:
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Si permutamos los límites de integración, la integral cambia de signo:
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

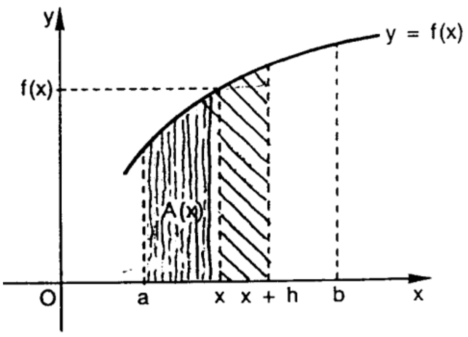
4. Integral de la suma o diferencia de dos funciones:
$$\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

5. Integral del producto de un número real por una función:
$$\int_a^b (k \cdot f)(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO:

"Si f es una función continua en el intervalo [a,b] y definimos la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ **con $x \in [a,b]$ entonces: F' (x)=f(x)."**

(La función F se llama **función integral**).



Queremos calcular la derivada de la función: $F(x) = \int_a^x f$

Calculamos el límite: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f$$

Luego $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$ es el cociente entre el área de la zona rayada (contenida entre el eje X, la gráfica de la función f y los valores x y x+h) y su base. Cuanto menor sea h, el cociente, su altura, será más próxima a f(x). Por tanto, cuando $h \to 0$, el límite del cociente es f(x).
Por tanto:
$$F`(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

REGLA DE BARROW:

"Sea f(x) una función continua en [a,b] y G(x) una función que cumple G'(x)=f(x). Entonces:

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)\text{"}$$

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Por el teorema fundamental del cálculo F'(x)=f(x). Como G'(x)=f(x),

F(x)=G(x)+k

Haciendo x=a:

F(a)=G(a)+k

Por otro lado: $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

Por tanto, G(a)+k=0 $\Rightarrow$ k=-G(a) $\Rightarrow$ $F(b) = \int_a^b f = G(b) - G(a)$

EJERCICIOS RESUELTOS

1º.- Calcula $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ con $f(t) = 3t^2 - \sqrt{t}$. Halla después $F'(x)$ y observa que $F'(x) = f(x)$.

Solución:

$$F(x) = \int_1^x \left(3t^2 - \sqrt{t}\right)dt = \left[t^3 - \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_1^x = x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{3} \Rightarrow F'(x) = 3x^2 - \sqrt{x} = f(x)$$

2º.- Calcula la derivada de la función: $g(x) = \int_x^0 2tdt$ por dos métodos.

Solución:

1º.- Se halla la integral y se deriva: $g(x) = \int_x^0 2tdt = \left[t^2\right]_x^0 = -x^2 \Rightarrow g'(x) = -2x$

2º.- Se observa que: $g(x) = \int_x^0 2tdt = -\int_0^x 2tdt$ y, por tanto: $g'(x) = -2x$.

3º.- Deriva: $g(x) = \int_{2x^2}^{x^3} \cos t dt$.

Solución:

$$g(x) = \int_{2x^2}^{x^3} \cos t dt = [sen t]_{2x^2}^{x^3} = sen\left(x^3\right) - sen\left(2x^2\right) \Rightarrow g'(x) = 3x^2\cos\left(x^3\right) - 4x\cos\left(2x^2\right)$$

4º.- Calcula la derivada de la función: $\int_{x^2}^{\operatorname{sen} x}\left(1 + \sqrt{t}\right)dt$.

Solución:

$F(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)dt \Rightarrow ¿F`(x)?$.

Sea $G(x) = \int f(x)dx$, una primitiva de f.

Por la regla de Barrow tenemos: $F(x) = G[h_2(x)] - G[h_1(x)]$.

Derivando: $F`(x) = G`[h_2(x)]h_2`(x) - G`[h_1(x)]h_1`(x)$.

Como G`=f $\Rightarrow$ $F`(x) = f[h_2(x)]h_2`(x) - f[h_1(x)]h_1`(x)$.

Entonces: $F`(x) = \left(1+\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)\cdot \cos x - \left(1+\sqrt{x^2}\right)\cdot 2x = \cos x + \sqrt{\operatorname{sen} x}\cdot \cos x - 2x - 2x\cdot |x|$.

LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN Y LA INTEGRAL DEFINIDA

1°.- INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Al introducir una nueva variable t, también hay que cambiar los límites de integración.

Si x=g(t) $\Rightarrow$ t=g^{-1}(x) $\Rightarrow$ dx=g'(t) dt.

El nuevo límite inferior es $g^{-1}(a)=t_1$ y el nuevo límite superior es $g^{-1}(b)=t_2$. Por tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f[g(t)]\cdot g`(t)dt$$

Ejemplo: Calcula: $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

Haciendo el cambio: $e^x = t; e^x dx = dt$

Cuando x=0 $\Rightarrow$ t=e^0 =1
x=1 $\Rightarrow$P t=e^1=e

$$\Rightarrow I = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{arctg}(t)]_1^e = \operatorname{arctg}(e) - \operatorname{arctg}(1)$$

2°.- INTEGRACIÓN POR PARTES

La fórmula que se utiliza para las integrales definidas es: $\int_a^b u\cdot dv = u\cdot v]_a^b - \int_a^b v\cdot du$

Ejemplo: Calcula: $I = \int_0^2 x\cdot e^x dx$

$$I = x\cdot e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = x\cdot e^x]_0^2 - e^x]_0^2 = 2\cdot e^2 - 0\cdot e^0 - [e^2 - e^0] = e^2 + 1$$

EJERCICIOS

5°.- Calcula $\int_1^6 f(x)dx$, siendo la función f la siguiente: $f(x) = \begin{cases} \frac{12}{x} & si \quad x > 6 \\ x^2 - 34 & si \quad 3 \le x \le 6 \\ -25 & si \quad x < 3 \end{cases}$

Solución: -89

6°.- Calcula la siguiente integral definida: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x| dx$.

Solución: 2

7º.- Determina en función de b > 1 el valor de la integral: $\int_0^b |x-1| \cdot \cos x dx$

Solución: I=1+(b-1)senb+cosb-2cos1

8º.- Calcula las siguientes integrales definidas:

1. $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \operatorname{sen}^3 x \cdot dx =$ =1/4
2. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$ =π/12
3. $\int_0^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$ =4
4. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx =$ =0

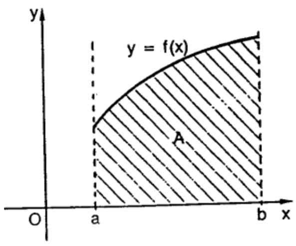
9º.- Calcula la integral definida: $\int_{-2}^{2} |x^2-1| dx$.

Solución: 4

CÁLCULO DE ÁREAS

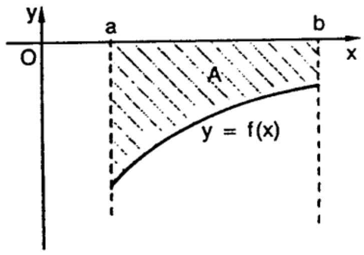
Área "A" limitada por una curva y=f(x), el eje OX y las rectas x=a y x=b:

Distinguiremos los casos siguientes:



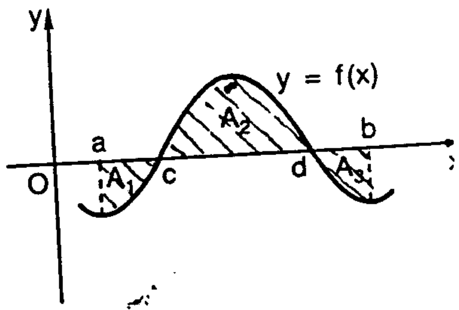
1º. Si f(x)≥0: $A = \int_a^b f(x)dx$.

El área es del mismo signo que la integral definida.



2º. Si f(x)≤0: $A = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$.

El área es el valor absoluto de la integral definida.



3º. Si f(x) cambia de signo en el intervalo [a,b], a partir de f(x)=0 se calculan los puntos de cambio, se considera el valor absoluto de cada una de las integrales definidas y se suman. Para la figura del ejemplo se tiene:

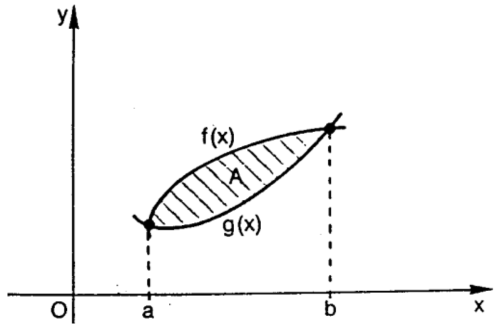
$$A = \left| \int_a^c f(x)dx \right| + \left| \int_c^d f(x)dx \right| + \left| \int_d^b f(x)dx \right|$$

<u>Área comprendida entre dos curvas</u>:

Distinguiremos dos casos:

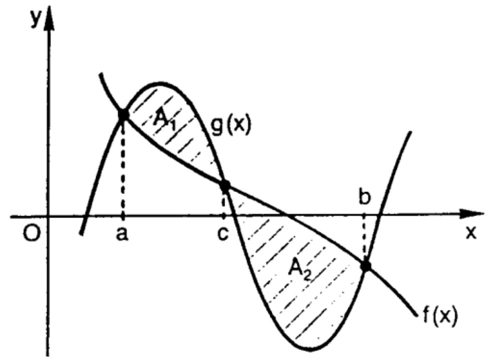
1º.- Si f(x) y g(x) se cortan en dos puntos x=a y x=b, y f(x) > g(x), $\forall x \in [a,b]$, el área del recinto limitado es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



2º.- Si f(x) y g(x) tienen otros puntos de corte, además de las áreas parciales, limitadas por f(x) y g(x) entre cada dos puntos de corte; para la figura del ejemplo se tiene:

$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [f(x) - g(x)]dx$$



EJERCICIOS

10º.- Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$ y el eje OX.

Solución: Hallamos los ceros de f: $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x = -2, 0, 2 y 3$.

Estos ceros determinan los siguientes intervalos: $[-2,0], [0,2], [2,3]$.

$$A = \left|\int_{-2}^0 (x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x)dx\right| + \left|\int_0^2 (x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x)dx\right| + \left|\int_2^3 (x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x)dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 6x^2\right]_{-2}^0\right| + \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 6x^2\right]_0^2\right| + \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 6x^2\right]_2^3\right| =$$

$$= \frac{244}{15} + \frac{116}{15} + \frac{113}{60} = \frac{1553}{60} u^2$$

11º.- Halla el área limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2 + 1$.

Solución: Representamos gráficamente el recinto y vemos que entre 0 y 1, la gráfica de f está por encima de la de g, es decir, $f(x) \geq g(x)$.

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 [(x+1) - (x^2+1)]dx = \int_0^1 (-x^2 + x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} u^2$$

12º.- a) Halla el área del recinto limitado por la curva y=cosx, el eje OX y las rectas x=-π/2 y x=π/2.

b) Calcula también el área del recinto limitado por la misma curva, el eje OX y las rectas x=π/4 y x=3π/4.

Solución: a) 2 unidades de área b) $2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ unidades de área

13°.- Determina el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = xe^{-x}$ y $g(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

Solución: $\left(\frac{3}{e} - 1\right)$ unidades de área

14°.- Halla el área limitada por la curva $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$ y su asíntota.

Solución: 2π unidades de área

15°.- Calcula el área limitada por la gráfica de la función f(x)=lnx, el eje OX y la recta tangente a dicha gráfica en el punto x=e.

Solución: $\left(\frac{e}{2} - 1\right)$ unidades de área

16°.- Calcula el área comprendida entre la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, el eje OX y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

Solución: $\pi/3$ unidades de área

17°.- Determina la función y=f(x) sabiendo que su gráfica pasa por el punto P(1,1), que la tangente en P es paralela a la recta 3x+3y-1=0 y que f''(x)=x.

Solución: $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$

18°.- Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \le x \le 2 \\ 2x - 2 & si \quad 2 < x < \infty \end{cases}$

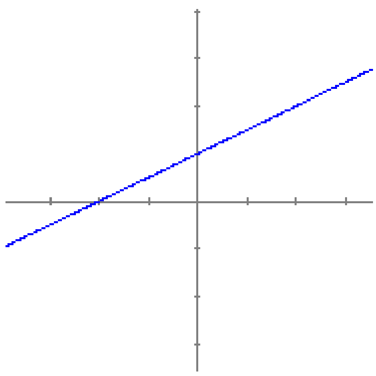
Para cada t≥0, sea s(t) = área de la región limitada por el eje horizontal, la gráfica de f, y la recta vertical trazada por el punto x = t.

a) Dibuja la gráfica de f y el recinto que define s(t).

b) Calcula la expresión s(t).

Solución: $s(t) = \begin{cases} t^2/2 & si \quad 0 \le t \le 2 \\ t^2 - 2t + 2 & si \quad 2 < t < \infty \end{cases}$

19°.- La gráfica corresponde a la función f'(x) primera derivada de una cierta función f(x).



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función f(x), interpretando la gráfica de f'(x).

b) Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función f(x), utilizando solamente la gráfica de f'(x).

c) Obtén la ecuación de la función derivada f'(x).

d) Obtén la expresión de la función f(x) que pasa por (2,-4) y dibújala.

Solución: a) decrece en: (-∞,-2); crece en (-2,∞); mínimo en x=-2; b) f''(x) = constante ⇒ f(x) es cóncava siempre ⇒ no hay puntos de inflexión c) $f'(x) = \frac{1}{2}x + 1$ d) $f(x) = \frac{x^2}{4} + x - 7$

20º.- a) Dibuja la recta de ecuación $y = \frac{2}{\pi}x$ y la curva de ecuación y = sen x cuando $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$; obtén razonadamente por cálculo integral el área limitada entre la recta y la curva.

b) Calcula la integral del producto de las dos funciones consideradas en el apartado anterior, es decir, $\int \left(\frac{2}{\pi}\right) x \cdot senx \cdot dx$, indicando los pasos realizados.

Solución: a) $\frac{4-\pi}{2}u^2$ b) $\frac{2}{\pi}(-x \cdot \cos x + senx) + K$

21º.- Haz un dibujo de la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = x^5$, y calcula el área. Halla también las ecuaciones de las rectas tangentes a estas curvas en los puntos de corte.

Solución: $A = \frac{1}{6}u^2$; ecuación de la tangente a $y = x^2$ en (0,0): y = 0; ecuación de la tangente a $y = x^2$ en (1,1): y = 2x - 1; ecuación de la tangente a $y = x^5$ en (0,0): y = 0; ecuación de la tangente a $y = x^5$ en (1,1): y = 5x – 4.