LÍMITES Y CONTINUIDAD

1º.- LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO

Para expresar que x toma valores cada vez más grandes, ponemos $x \to +\infty$. Se lee "x tiende a más infinito".
Por ejemplo, si x toma los valores 10, 100, 1000, 10000, …, decimos que $x \to +\infty$.

♦ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **(límite de f(x) cuando x tiende a más-infinito)**

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ Cuando $x \to +\infty$, los valores de f(x) crecen cada vez más.

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$ Cuando $x \to +\infty$, los valores de f(x) son cada vez más "negativos".

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L}$ Cuando $x \to +\infty$, los valores de f(x) son cada vez más próximos a un número L.

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 5}$

x	10	100	1000	…
f(x)	1,876	1,9987	1,99999987	…

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

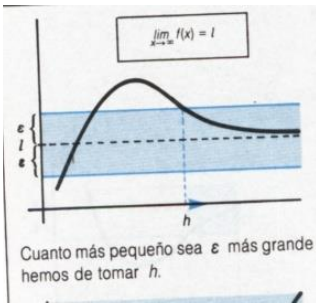
$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = no \quad existe}$ Cuando $x \to +\infty$, los valores de f(x) ni crecen ni decrecen indefinidamente, ni se acercan cada vez más a ningún número.
Ejemplo: Las funciones trigonométricas presentan este comportamiento.

♦ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ **(límite de f(x) cuando x tiende a menos-infinito)**

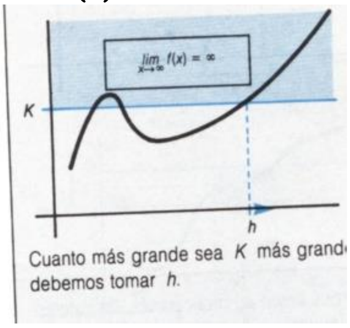
El significado es similar al del $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y los comportamientos que pueden darse son idénticos a los que hemos visto para $x \to -\infty$.

Límites en el infinito: definiciones

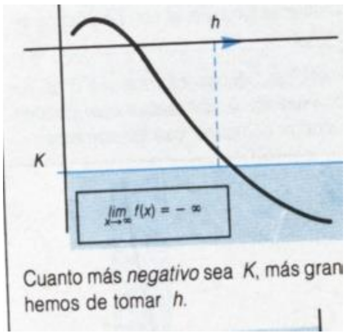
Se dice que $f(x) \to l$ cuando $x \to \infty$ y se escribe $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$, si dado un número ε> 0 existe un h tal que si x > h entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.



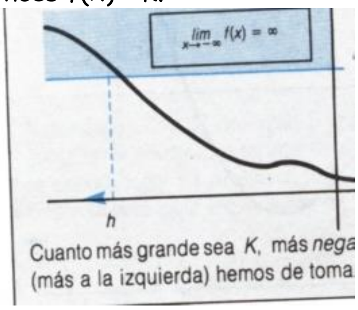
Se dice que $f(x) \to \infty$cuando $x \to \infty$y se escribe $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si dado un número arbitrario, k, podemos encontrar otro, h, tal que si x > h entonces f(x) > k.



Análogamente:
Se dice que $f(x) \to -\infty$cuando $x \to \infty$y se expresa $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$si dado un número, K, podemos encontrar otro, h, tal que si x > h entonces f(x) < K.



De forma similar se definen los límites cuando $x \to -\infty$:
Se dice que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to -\infty$ y se escribe $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ si dado un número, K, podemos encontrar otro, h, tal que si x < h entonces f(x) > K.



Se dice que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$ y se escribe $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$si dado un número, K, podemos encontrar otro, h, tal que si x < h entonces f(x) < K.

2º.- LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

x→c significa que x toma valores cada vez más próximos a c. Se lee "x **tiende a** c".

Por ejemplo: 0; 1,9; 0,5; 1,4; 0,8; 1,1; 0,95; 1,01; 0,999; … Es una secuencia de números cada vez más próximos a 1. Escribimos x→1.

x→c^- significa que x toma valores cada vez más próximos a c, pero menores que c. Se lee "x **tiende a** c **por la izquierda**".

Por ejemplo, la secuencia: 0; 0,5; 0,8; 0,95; 0,99; … Está formada por números menores que 1 y cada vez más próximos a 1. Escribimos x$\to 1^-$ *.*

x$\to c^+$ significa que x toma valores cada vez más próximos a c, pero mayores que c. Se lee "x **tiende a** c **por la derecha**".

Por ejemplo, la secuencia: 2; 1,5; 1,1; 1,01; 1,001; … Escribiremos x$\to 1^+$.

Si x$\to c^-$, entonces x toma valores variables. Como consecuencia la función f(x) también toma valores variables. El comportamiento de f(x) cuando x$\to c^-$, se expresa así:

- $\lim_{x\to c^-} f(x)$ **(límite de f(x) cuando x tiende a c por la izquierda)**

$\boxed{\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty}$ Cuando x$\to c^-$, f(x) toma valores cada vez más grandes, llegando a superar cualquier valor, por grande que sea.

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

x	0	0,9	0,99	…
f(x)	1	100	10000	…

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$\boxed{\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty}$ Cuando x$\to c^-$, f(x) toma valores cada vez "más negativos".

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

x	0	0,9	0,99	…
f(x)	-1	-10	-100	…

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = L}$ Cuando x$\to$c, f(x) toma valores cada vez más próximos al número L.

Ejemplo: $f(x) = x^2 + 5$

x	0	0,9	0,99	…
f(x)	5	5,81	5,9801	…

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 6$

♦ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ **(límite de f(x) cuando x tiende a c por la derecha)**

El significado es similar al del $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ y los comportamientos que pueden darse son idénticos a los que hemos visto para x→ c^- .

♦ $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ **(límite de f(x) cuando x tiende a c)**

Es el comportamiento de la función cuando x se aproxima a c, sin importar si es por la derecha o por la izquierda.

Si $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$, decimos que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.

Análogamente, cuando los dos límites laterales son +∞ ó -∞.

Si los dos límites laterales no toman el mismo valor, se dice que **no existe** el $\lim\limits_{x \to c} f(x)$.

Cuando los dos límites laterales en un punto p existen y coinciden, entonces existe el límite en dicho punto p. Si una función tiene límite en un punto, este límite es único.

Definiciones: Límites laterales infinitos de una función en un punto

Se dice que $f(x) \to \infty$cuando $x \to p$por la izquierda y se escribe $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = \infty$ cuando, dado un número K, podemos encontrar otro número δ, tal que si 0 < p-x <δ entonces f(x) > K.
(Observa que 0 < p-x significa que x < p).

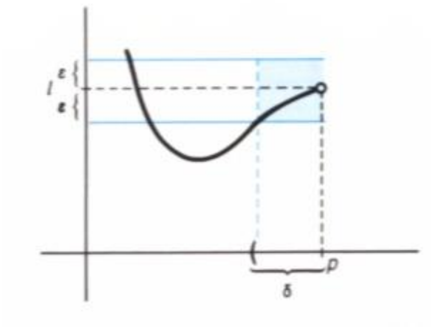
Se dice que $f(x) \to \infty$cuando $x \to p$por la derecha y se escribe $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = \infty$cuando, dado un número K, podemos encontrar otro número δ, tal que si 0 < x-p <δ entonces f(x) > K.

Se dice que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to p$ por la izquierda y se escribe $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = -\infty$ cuando, dado un número K, podemos encontrar otro número δ, tal que si 0 < p-x <δ entonces f(x) < K.

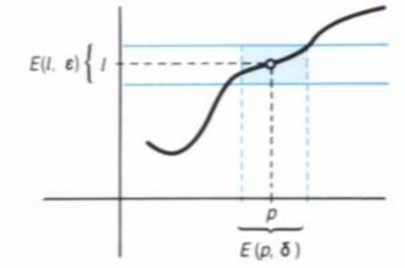
Se dice que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to p$por la derecha y se escribe $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = -\infty$ cuando, dado un número K, podemos encontrar otro número δ, tal que si 0 < x-p <δ entonces f(x) < K.

Definiciones: Límites laterales finitos de una función en un punto:

Se dice que $f(x) \to l$ cuando $x \to p$por la izquierda y se escribe $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = l$cuando, dado ε> 0 existe un δ tal que si 0 < p-x <δ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.



Se dice que $f(x) \to l$ cuando $x \to p$por la derecha y se escribe $\lim_{x\to p^+} f(x) = l$ cuando, dado ε> 0 existe un δ tal que si 0 < x-p <δ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.



Definición: Límite de una función en un punto:

Cuando los dos límites laterales en un punto p existen y coinciden, entonces existe el límite en dicho punto p. Si una función tiene límite en un punto, este límite es único.

3º.- OPERACIONES CON LÍMITES. INDETERMINACIONES

Sean f y g dos funciones tales que existan $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ y c un número real, (a puede ser un valor real o $\pm\infty$), entonces:

PROPIEDADES	FUNCIÓN	OPERACIONES
$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$	Suma	**Adición**
$\lim_{x\to a}(-f)(x) = -\lim_{x\to a} f(x)$	Opuesta	
$\lim_{x\to a}(f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$	Diferencia	
$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$	Producto	**Multiplicación**
$\lim_{x\to a}(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$	Inversa	
$\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$	Cociente	
$\lim_{x\to a}(c\cdot g)(x) = c\cdot\lim_{x\to a} g(x)$	Producto por un número	**Multiplicación por un número**
$\lim_{x\to a} c = c$	Constante	
$\lim_{x\to a} g\left(f(x)\right) = g\cdot\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$	Compuesta	**Composición**
$\lim_{x\to a} x = a$	Identidad	
$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim_{x\to a} g(x)}$	Potencia	**Potenciación**

Estas relaciones son ciertas siempre que tengan sentido las operaciones definidas con números reales o las definidas al añadir los elementos +∞ y -∞. En caso contrario no es posible obtener el límite del primer miembro a partir de los límites del segundo.
Cuando esto ocurre se dice que el cálculo del límite no está determinado o es indeterminado. Esta expresión, no significa que el límite no exista o no se pueda determinar, sino que la aplicación directa de los teoremas tal y como están enunciados es imposible. Los casos de indeterminación son los siguientes:

Racionales	Exponenciales
k/0, ∞/∞, 0·∞, ∞-∞, 0/0	1^{∞} , ∞^{0} , 0^{0}

Si al calcular un límite se presenta alguno de estos casos, conviene transformar la expresión de la función en otra equivalente a la que sí puedan aplicarse los teoremas de los límites.

4º.- RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES.

4.1. Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

Aparecen al calcular límites de cocientes de funciones polinómicas. Se resuelven dividiendo numerador y denominador por la máxima potencia del denominador o utilizando la comparación de grados de la forma siguiente:

- si el grado del numerador > grado del denominador, entonces el límite es ±∞.
- si el grado del numerador = grado del denominador, entonces el límite es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado.
- si el grado del numerador < grado del denominador, entonces el límite es 0.

Ejemplo:

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^4+2x^2-5}{4x^4-7}=\frac{\infty}{\infty}(IND)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^4}{4x^4}=\frac{-3}{4}$$

4.2. Indeterminaciones del tipo ∞-∞:

Aparecen al calcular límites de diferencias de funciones racionales o de funciones irracionales. El primer caso se resuelve operando convenientemente, y el segundo caso se resuelve multiplicando al numerador y al denominador por la expresión conjugada.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]=\infty-\infty(IND)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]\left[\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right]}{\left[\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right]}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+1}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=\frac{\infty}{\infty}(IND)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1+\frac{2}{x}}=\frac{-4}{2}=-2$$

4.3. Indeterminaciones del tipo 1^{∞}:

- El número "e"

Sea $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. ¿Cuál es el límite de esta función cuando x →∞?

Calcularemos algunos términos:

x	100	1000	1000000	10000000
f(x)	2,70481...	2,71692...	2,71828047...	2,71828169...

Aunque cada término calculado es mayor que los anteriores, el crecimiento es tan lento que es razonable pensar que es convergente. Su límite es un número irracional y se le nombra con la letra e:
e=2,71828...
La expresión del paréntesis tiende a 1 y el exponente tiende a ∞.

Es decir $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$:

Utilizando este límite, podemos resolver indeterminaciones de la forma: si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$, entonces: $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=1^{\infty}$, de la siguiente manera:

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}=1^{\infty}\,IND=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}\cdot(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{x-1}\cdot(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+2)}{x-1}}=e^{2}$$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$, entonces: $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$, tanto si a es un número real como si es $\pm\infty$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3x-5}{3x-2}\right]^{2x^2}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x^2\left[\frac{3x-5}{3x-2}-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x^2\left[\frac{-3}{3x-2}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x^2}{3x}}=e^{-\infty}=0$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}[1+3x]^{\frac{2}{x}}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}(1+3x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{x}}=e^{6}$

4.4. Indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$:

Aparecen al calcular límites de cocientes de funciones polinómicas o de funciones irracionales. El primer caso se resuelve factorizando los polinomios numerador y denominador mediante la regla de Ruffini, y el segundo caso se resuelve multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada de la función que lleva la raíz.

Ejemplos:

- $$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-8}{x^2+x-2}=\frac{0}{0}(IND)=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{2(-2-2)}{-2-1}=\frac{8}{3}$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+4}-2}=\frac{0}{0}(IND)=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{x}=$$

$$=\frac{0}{0}(IND)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(\sqrt{x+4}+2)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)(\sqrt{x+4}+2)=-1\cdot 4=-4$$

4.5. Indeterminaciones del tipo $\frac{K}{0}$:

Aparecen al calcular límites de cocientes de funciones y se resuelven estudiando los límites laterales.

Ejemplo:

- $\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{x-3}=\frac{K}{0}(IND)$ Estudiamos los límites laterales:

$\lim_{x\to 3^-}\frac{x+5}{x-3}=-\infty$

$\lim_{x\to 3^+}\frac{x+5}{x-3}=+\infty$ Como son distintos, no existe $\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{x-3}$

4.6. Indeterminaciones del tipo 0·∞:

Este tipo de indeterminaciones se resuelven transformándolas en las del tipo ∞/∞, o en las del tipo 0/0.

Ejemplo:

- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{x^4-2}}\cdot(2x-3)=0\cdot\infty(IND)=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-9}{\sqrt{x^4-2}}=\frac{\infty}{\infty}(IND)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{6}{x}-\frac{9}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^4}}}=0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS DE REPASO

1º.- Calcula los siguientes límites: **(INDICA TODAS LAS INDETERMINACIONES)**

a) $\lim_{x\to+\infty}x^{-4}$ b) $\lim_{x\to-\infty}4x^4$ c) $\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3}{x^3}\right]$ d) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{-2}}{5}\right]$

e) $\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{x^5}{3}\right]$ f) $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{x^5}\right]$ g) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{x+2}\right]$ h) $\lim_{x\to+\infty}3^{-x}$

i) $\lim_{x\to-\infty}3^{-x}$ j) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{3}\right]^x$ k) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}$ l) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}$

SOLUCIONES: a) 0 b) +∞ c) +∞ d) +∞ e) 0
f) 0 g) 0 h) 0 i) +∞ j) 0 k) +∞ l) -∞

EJERCICIOS PROPUESTOS

7º.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{x^2+4}{x^2-2x}\right]$ b) $\lim_{x\to 2}[x-1]^{\frac{3}{x-2}}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]$

d) $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$ e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$ f) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right]^{x^2-1}$ g) $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$

h) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$ i) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2+4}{x+4}\right]^{\frac{x}{x-1}}$ j) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}$

k) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\sqrt{9x^2+4x-2}}{3}$ l) $\lim_{x\to 0}[1+3x]^{\frac{4}{x}}$ m) $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^2+3}{4x^2+5}\right]^{\frac{x}{2}}$

n) $\lim_{x \to +\infty} [\ln(2x-3) - \ln(x+1)]$ o) $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x-1}{2x+5} \right]^{\sqrt{x^2+3x}-x}$

SOLUCIONES: a) 16/3 b) e^3 c) 3 d) $-\infty$ e) 1
f) 0 g) $+\infty$ h) 8 i) $e^{1/5}$ j) 4 k) -2/9 l) e^{12}
m) $+\infty$ n) ln2 o) 1

8º.- Calcula el valor de a ($a \neq 0$) para que se verifique: $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2+5x}{x^2+1} \right]^{ax} = e^{-5}$.

SOLUCIÓN: a=-1

Ejercicios de Selectividad LOGSE:

9º.- Determina el valor de a para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2+ax+1} - x \right] = 2$ b) $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{4x+5}{4x+3} \right]^x = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi} \right]^{ax^2}$

SOLUCIONES: a) a=4 b) $a = \frac{2}{1-\pi}$

10º.- Calcula el valor de m que haga cierta la siguiente igualdad: $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{3-x}{2-x} \right]^{mx} = \frac{e}{e^2}$

SOLUCIÓN: m=1

11º.- Calcula los valores de k de modo que sean ciertas las siguientes igualdades:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2kx^2-7x+5}{7x^2-3} = -1$ b) $\lim_{x \to -1} \frac{kx^2-k}{x^2+3x+2} = 4$

SOLUCIONES: a) k=-7/2 b) k=-2

12º.- Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 si x \leq 1 \\ ax+3 si 1 < x \leq 2 \\ bx^3-2 si x > 2 \end{cases}$, calcula los valores de a y b para que existan los límites $\lim_{x \to 1} f(x)$ y $\lim_{x \to 2} f(x)$.

SOLUCIONES: a=-1 b=3/8

5º.- CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

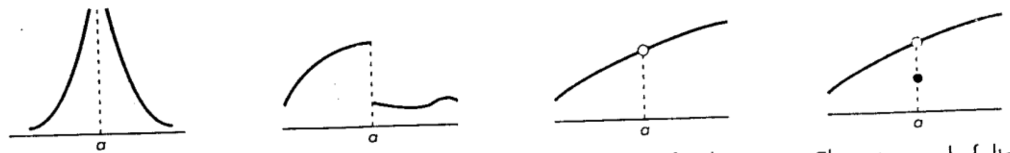
La idea intuitiva de continuidad implica una variación suave de la función, sin saltos bruscos que rompan la gráfica de la misma.

Una función **es continua en un punto** x = a, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) Existe el límite de la función f(x) en x = a.
b) La función está definida en x = a; es decir, existe f(a).
c) Los dos valores anteriores coinciden.

Si una función no es continua en un punto x = a se dice que es **discontinua** en dicho punto.

Algunas razones por las que una función puede ser discontinua en un punto son las siguientes:



Tiene ramas infinitas en ese punto. Presenta un salto. No está definida (le falta un punto). El punto que le falta lo tiene desplazado.

La continuidad o discontinuidad de una función en un punto exige estar **definida la función** en él. Por ejemplo, la función f(x) = 1/x no es continua ni discontinua en x = 0 ya que no está definida. (Sin embargo vamos a hablar de discontinuidad en ese punto).

Si nos restringimos a los valores que toma una función a la derecha del punto x=a o a la izquierda, se habla de **continuidad por la derecha o continuidad por la izquierda**.

- **Discontinuidades**

Una función presenta una **discontinuidad evitable** en un punto cuando existe límite en él y no coincide con el valor de la función en el mismo o no está definida.
El valor que deberíamos dar a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama **verdadero valor** de la función en el mismo.

Una función presenta una **discontinuidad inevitable** en un punto cuando existen los límites laterales en él y son distintos. El valor

$$\left|\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)\right|$$

se llama **salto de la función** en ese punto, y puede ser finito, si es un número real, o infinito.

Ejemplos

- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & si \quad x \neq 1 \\ 3 \quad si \quad x = 1 \end{cases}$

¿Qué sucede en x=1?

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$; luego existe $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

b) f(1)=3; luego la función está definida en x=1

c) Los dos valores anteriores no coinciden

Por tanto, la función tiene una discontinuidad evitable en x=1. Para que la función fuera continua en x=1, debería ser f(1)=2. Por tanto 2 es el verdadero valor de la función en x=1.

- ¿Cuál es el verdadero valor de la función $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ en x=3?

La función no está definida en x=3. Veamos cuál es el límite de la función en x=3:

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=1$ Para que la función fuera continua en x=3, debería ser f(3)=1. Por tanto, 1 es el verdadero valor de la función en x=3.

- Consideremos la función signo de x definida por:

$$sig(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ -1 & si \quad x<0 \end{cases}$$

¿Qué sucede en x=0?

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} sig(x)=-1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} sig(x)=1$. Los límites laterales no coinciden. Luego la función tiene una discontinuidad inevitable en el punto x=0 de salto 2.

- **Funciones continuas**

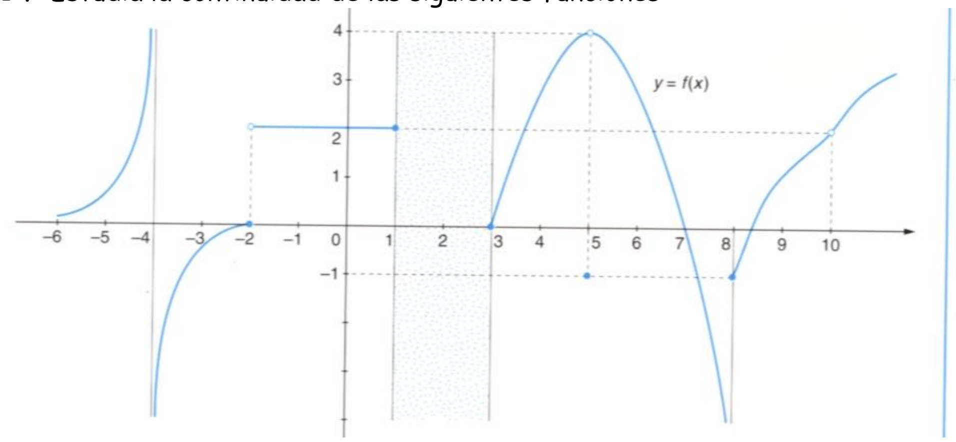
Una función es **continua en un intervalo** cuando lo es en todos y cada uno de los puntos del intervalo.

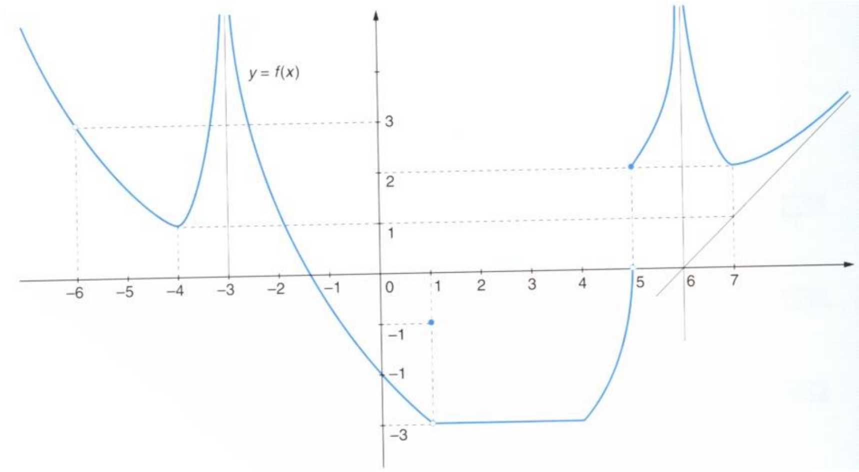
Se dice que una función es **continua** cuando lo es en todos y cada uno de los puntos de su dominio de definición.

Las **operaciones con funciones continuas** en x=a dan como resultado otra función continua en él, siempre que tenga sentido la operación. Entonces: <u>todas las funciones elementales (polinómicas, racionales, exponenciales y trigonométricas) son continuas en todos los puntos donde están definidas.</u>

<u>EJERCICIOS</u>

1º.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:





8º.- ¿Puedes definir la función $f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}$ en algún punto de manera que sea continua en todo R?

SOLUCIÓN: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1\\ 1 & \text{si} \quad x=1\end{cases}$

9º.- Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0\\ 1-x^2 & \text{si} \quad 0<x\le 1\\ x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

SOLUCIÓN: discontinua en x=1 (continua en R-{1}).

10º.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}5-\frac{|x|}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 5 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & \text{si} \quad x\neq 3\\ 6 & \text{si} \quad x=3\end{cases}$

SOLUCIÓN: a) continua en R-{0} b) continua en R

11º.- Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo R.

a) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}(3x) & \text{si} \quad x\le \frac{\pi}{2}\\ 2k+\cos(2x) & \text{si} \quad x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{x-2} & \text{si} \quad x\neq 2\\ k & \text{si} \quad x=2\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}1+|x| & si \quad x<0\\ k & \text{si} \quad x=0\\ \frac{3}{2}x+1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+2}{x^2-1} & \text{si} \quad x\neq -1\\ k & \text{si} \quad x=-1\end{cases}$

SOLUCIÓN: a) k=0 b) no es continua para ningún valor de k c) k=1 d) k=-1

12º.- Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \left| x^2 - 6x + 5 \right|$.

SOLUCIÓN: continua en todo R

13º.- Halla el dominio y estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} - 2\sqrt{2}$$

SOLUCIÓN:Dom(f)=[-4,4] y continua en todo su dominio.

14º.- Halla los puntos de discontinuidad de la siguiente función y clasifícalos:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$$

SOLUCIÓN: en x=0 hay una discontinuidad inevitable de salto infinito y en x=2 hay una discontinuidad evitable.

15º.- Halla el valor de a para el cual la función $f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4}$ tenga una discontinuidad evitable en x=1.

SOLUCIÓN: a=-2.

Ejercicios de Selectividad LOGSE:

16º.- La función $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^3 + x^2 + ax + 12}$ presenta una discontinuidad evitable en x=-2, ¿para qué valor de a?

SOLUCIÓN: a=4.

17º.- Estudia el dominio y la continuidad de la función: $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right)$

SOLUCIÓN: Dom(f) = (-2,0)U(0,+∞) y continua en todos los puntos de su dominio.

6º.- TEOREMA DE BOLZANO

Si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b] y el signo de f(a) es distinto del signo de f(b), entonces existe al menos un número $c \in (a,b)$, tal que $f(c)=0$.

Ejercicio:
Estudia si estas funciones se anulan en algún punto del intervalo (4,6):

A) $f(x) = x^3 - 10x - 30$ B) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} + \frac{\cos x}{x-1}$

Solución:

A) f(x) es continua por ser un polinomio.
f(4) = -6 < 0; f(6) = 126 > 0
Se cumplen las condiciones del teorema. Por lo tanto, existe $c \in (4,6)$, tal que $f(c)=0$.

B) $\frac{\sqrt{x+1}}{e^x} \to \begin{cases} \sqrt{x+1} \quad definida \quad en \quad [4,6] \\ e^x \quad no \quad se \quad anula \quad en \quad [4,6] \end{cases} \to es \quad continua \quad en \quad [4,6]$

$\frac{\cos x}{x-1} \to \begin{cases} \cos x \quad definida \quad en \quad [4,6] \\ x-1 \quad no \quad se \quad anula \quad en \quad [4,6] \end{cases} \to es \quad continua \quad en \quad [4,6]$

f(x) es suma de funciones continuas, por lo que es continua en $[4,6]$.
f(4) = -0,177 < 0; f(6) = 0,199 > 0
Se cumplen las condiciones del teorema. Por lo tanto, existe $c \in (4,6)$, tal que $f(c)=0$.

7º.- TEOREMA DE DARBOUX
(TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS)

Si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b], entonces en el intervalo (a,b) toma todos los valores m comprendidos entre f(a) y f(b). Es decir:
Si $f(a) < m < f(b)$, existe un número $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = m$.

Ejercicio:
Dada la función $f(x) = (1-x^2)\cos(\pi x)$, demuestra que existe $c \in (1,2)$ tal que $f(c) = -2$.

Solución:
F(x) es producto de una polinómica y una trigonométrica continuas en R, por tanto f(x) es continua en todo R.
f(1) = 0; f(2) = -3
Por tanto, existe un número $c \in (1,2)$ tal que $f(c) = -2$.

8º.- TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b], entonces f(x) alcanza en este intervalo un máximo y un mínimo absolutos.