REGLA DE L'HÔPITAL

Supongamos que $\lim\limits_{x \to u} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to u} g(x) = 0$ siendo g(x)≠0 en un entorno de u. Si existe el límite $\lim\limits_{x \to u} \frac{f`(x)}{g`(x)}$ (tanto si es finito como -∞ o +∞) también existe el límite $\lim\limits_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)}$ y son iguales. ("u" puede ser un número real "a" o -∞ o +∞).

El enunciado de la regla de L´Hôpital es similar en las indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
Las indeterminaciones del tipo 0·∞ y ∞-∞ se reducen a alguno de los casos anteriores, transformando adecuadamente las expresiones.
Algunos límites de la forma 0^0, ∞^0, 1^∞ también pueden transformarse en otros a los que puede aplicarse la regla de L´Hôpital tomando logaritmos neperianos.
En algunos casos el límite del cociente de las derivadas vuelve a presentar indeterminación. Si sucede esto, se repite el proceso una vez que hayamos comprobado que puede aplicarse la regla de L´Hôpital.

EJERCICIOS PROPUESTOS

76.- Halla a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen^2 x}{x^2} & si \quad x > 0 \\ \ln(1 + x^2) - a & si \quad x \le 0 \end{cases}$$

Solución: a=-1

77.- Determina a y b para que el siguiente límite exista y sea finito: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) + ax + bx^2}{sen^3 x}$.
Solución: a=-1

78.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^x =$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{sen^2 x}\right) =$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \bullet sen\left(\frac{1}{x}\right)}{senx} =$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + senx)^{\frac{\cos ecx}{2}} =$ e) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2x)^{x^2} =$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\sqrt[x]{b} - 1\right] =$

g) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^+} (tgx)^{\cos x} =$ h) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) \bullet tg\left(\frac{\pi x}{2}\right) =$ i) $\lim\limits_{x \to \pi} (1 - \cos 2x)^{\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}} =$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^{2x} =$ k) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + a^x)^{\frac{1}{x}} =$ l) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\ln(2 - e^x)} =$

m) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right) =$

Solución: a) 1 b) –1/3 c) -1 d) $e^{1/2}$ e) 1 f) lnb g) 1 h) –2/π
i) 1j) e^4 k) a l) 1 m) ½

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

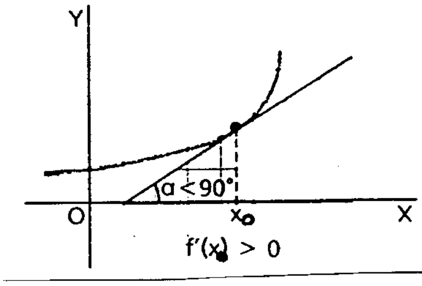
Una función es **estrictamente creciente** (**creciente**) en un intervalo cuando para dos puntos situados en él, x y x+h se verifique que:

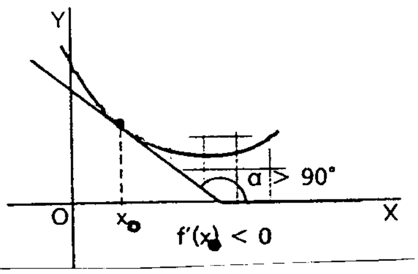
$$x < x+h \Rightarrow f(x) < f(x+h) \qquad (x \le x+h \Rightarrow f(x) \le f(x+h))$$

Una función es **estrictamente decreciente** (**decreciente**) en un intervalo cuando para dos puntos situados en él, x y x+h se verifique que:

$$x > x+h \Rightarrow f(x) > f(x+h) \qquad (x \ge x+h \Rightarrow f(x) \ge f(x+h))$$

La relación entre crecimiento y decrecimiento y la derivada se observa gráficamente:





La función es estrictamente creciente en el punto x_0.
Como 90° > $\alpha \ge 0$, resulta $f'(x_0) = \text{tg } \alpha \ge 0$

La función es estrictamente decreciente en el punto x_0.
180° $\ge \alpha >$ 90°, resulta $f'(x_0) = \text{tg } \alpha \le 0$

Una función es creciente (decreciente) en un intervalo cuando su derivada primera es positiva (negativa) en todos los puntos del intervalo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.- Estudia el dominio de la función: $f(x) = \dfrac{\ln x + 2}{x^2}$ y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución: D=$(0,+\infty)$, f estrictamente creciente en $(0, e^{-3/2})$, f estrictamente decreciente en $(e^{-3/2}, +\infty)$.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Una función tiene un **máximo relativo** en el punto x=a cuando antes del punto es creciente y después del punto decreciente, siendo el valor que toma en el punto, mayor que cualquier otro inmediato anterior o posterior.

Una función tiene un **mínimo relativo** en el punto x=a cuando antes del punto es decreciente y después del punto creciente, siendo el valor que toma en el punto, menor que cualquier otro inmediato, anterior o posterior.

Los valores máximos y mínimos relativos pueden no coincidir con el valor mayor o menor que tome la función; éstos reciben el nombre de **máximo absoluto** y **mínimo absoluto**, respectivamente.

Si una función tiene máximos o mínimos y es derivable, entonces su derivada se anula en estos puntos, pues en caso contrario la función sería estrictamente creciente o decreciente y no podría cumplirse entonces la condición de máximo o mínimo.

Sea f una función que admite derivada segunda en un intervalo y sea x_0 un punto del intervalo tal que $f'(x_0)=0$. Entonces:

a) Si $f''(x_0)<0 \Rightarrow$ f(x) tiene un máximo relativo en x_0.

b) Si $f''(x_0)>0 \Rightarrow$ f(x) tiene un mínimo relativo en x_0.

Demostración:

a) Si $f''(x_0)<0 \Rightarrow$ f' es estrictamente decreciente en el punto x_0. Además $f'(x_0)=0$. Luego a la izquierda de x_0, f' es positiva y a la derecha de x_0 f' es negativa. Luego a la izquierda de x_0 f es creciente y a la derecha de x_0 f es decreciente. Por tanto, en x_0 f(x) tiene un máximo relativo.

b) Análogamente.

Cuando se anulan las primeras derivadas, existe extremo relativo si la primera derivada no nula es de orden par.

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}=0\begin{cases} f^{(n)}<0;n \quad par \Rightarrow \begin{cases} f \quad tiene \quad máximo \quad relativo \\ en \quad el \quad punto \quad (x_0, f(x_0)) \end{cases} \\ f^{(n)}>0;n \quad par \Rightarrow \begin{cases} f \quad tiene \quad mínimo \quad relativo \\ en \quad el \quad punto \quad (x_0, f(x_0)) \end{cases} \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

11.- La función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ verifica que f(1) = 1, f'(1) = 0 y que f no tiene extremo relativo en x=1. Calcula "a", "b" y "c".
Solución: a=-3, b=3, c=0.

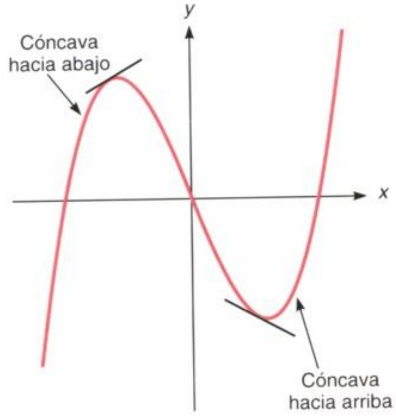
12.- Halla el valor de a para que la función $f(x)=x^2-6x+a$ tenga un mínimo de valor –1.
Solución: a=8

13.- Estudia el crecimiento de la función: $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{e^x}$. Determina, si existen, sus máximos y mínimos relativos.
Solución: f es estrictamente creciente en (1/2,3), f es estrictamente decreciente en (-∞,-1/2) U (3,+∞). Presenta un máximo relativo en $(3,9/e^3)$ y un mínimo relativo en $(1/2,-1/e^{1/2})$.

14.- Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos de $f(x)=x^2-2|x|+2$ en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$.
Solución: f es monótona creciente en (-1/2,0) U (1,3/2), monótona decreciente en (0,1) y presenta un mínimo relativo en (1,1).

15.- Calcula los valores de <u>a</u>, <u>b</u> y <u>c</u> para que la función $y=x^3+ax^2+bx+c$ tenga un mínimo en x=2, un máximo en x=-1, y pase por (1,0).
Solución: a=-3/2, b=-6, c=13/2

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD



Una curva es **<u>cóncava hacia arriba</u>** (hacia las y positivas) en un punto cuando, al trazar la tangente en ese punto, la curva queda por encima de la recta tangente.

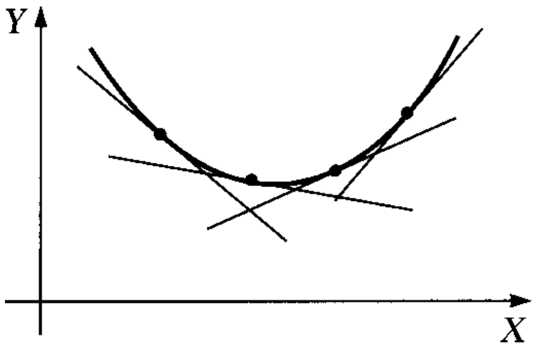
Una curva es **<u>cóncava hacia abajo</u>** (hacia las y negativas) en un punto cuando, al trazar la tangente en ese punto, la curva queda por debajo de la recta tangente.

Gráficamente observamos que se cumple la siguiente regla:

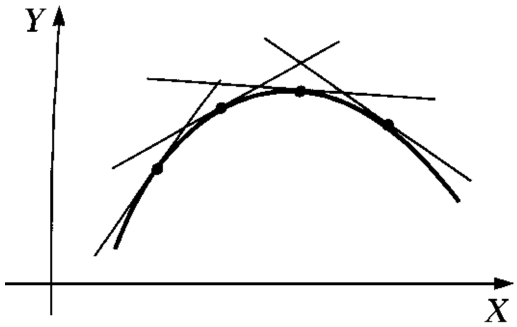
Si f es cóncava hacia arriba en x_o entonces f' es creciente en x_o. (Las pendientes de las tangentes van creciendo).

Si f es cóncava hacia abajo en x_o entonces f' es decreciente en xo. (Las pendientes de las tangentes van decreciendo).

Esto significa que podemos asociar la derivada segunda con el ritmo de crecimiento (o decrecimiento) de la función:



$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f'(x)$ es creciente en x_0. Esto significa que si $f'(x) > 0$, la pendiente de la tangente a la curva va aumentando, lo que significa que la función crece cada vez más. Mientras que si $f'(x) < 0$, la pendiente de la tangente a la curva va disminuyendo en valor absoluto (puesto que es negativa), lo que significa que la función decrece cada vez menos.



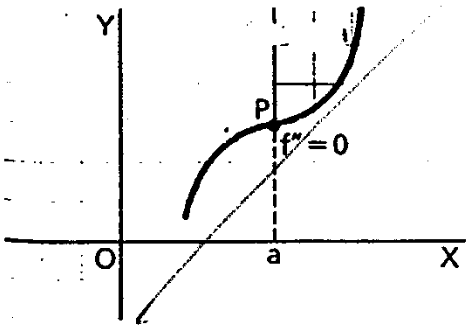
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f'(x)$ es decreciente en x_0. Esto significa que si $f'(x) > 0$, la pendiente de la tangente a la curva va disminuyendo, lo que significa que la función crece cada vez menos. Mientras que si $f'(x) < 0$, la pendiente de la tangente a la curva va aumentando en valor absoluto (puesto que es negativa), lo que significa que la función decrece cada vez más.

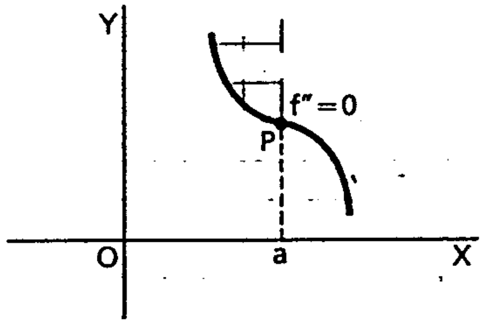
En resumen: **Una función es cóncava hacia arriba en un punto si su derivada segunda es positiva en dicho punto. ($f''(x_o) \geq 0$).**

Una función es cóncava hacia abajo en un punto si su derivada segunda es negativa en dicho punto. ($f''(x_o) \leq 0$).

PUNTOS DE INFLEXIÓN

Puntos de inflexión de una curva son los puntos en que cambia el sentido de la curvatura pasando de cóncava a convexa o de convexa a cóncava. En los puntos de inflexión la tangente atraviesa la curva.





Si f tiene un punto de inflexión en x_0, entonces f'' (x_0)=0.

Si f''(x_0)=0 y f'''(x_0)≠0, la función tiene un punto de inflexión en el punto x_0.

Cuando se anulan las primeras derivadas, existe punto de inflexión si la primera derivada no nula es de orden impar.

$$f`(x_0) = f``(x_0) = \ldots = f^{(n-1)} = 0 \left\{ f^{(n)} \neq 0; n \quad impar \Rightarrow \begin{cases} f \quad tiene \quad punto \quad de \quad \inf lexio'n \\ en \quad el \quad punto \quad \left(x_0, f(x_0)\right) \end{cases} \right.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

18.- Halla números reales "a" y "b" tales que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & si \quad x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & si \quad x > 0 \end{cases}$$

sea derivable en el punto x=0. Para esos valores de "a" y "b", analiza si f(x) tiene inflexión en el punto x=0.

Solución: a=1, b=0. Si hay punto de inflexión en x=0.

19.- Halla los coeficientes "a", "b","c" y "d" de la función: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1,0) es y = -3x + 3, y que la función tiene un extremo relativo en x=0.

Solución: a=1; b=-3; c=0; d=2

20.- Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$. Halla "a" y "b" de manera que la gráfica de la función tenga para x=1 una inflexión cuya recta tangente en ese punto forme un ángulo de 45° con el eje OX.

Solución: a=-3; b=4

21.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1,1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta 3x + y = 0.

a) Halla "a" y "b".
b) Determina sus extremos relativos, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de inflexión.

Solución: a) a=-2, b=3 b) máximo en $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; mínimo en $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; crece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; decrece en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$; punto de inflexión: (0,0).

22.- Halla los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función: f(x)=sen(2x).

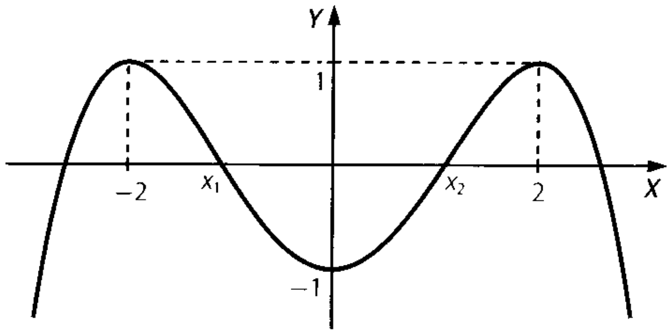
Solución: máximo relativo en los puntos de abscisa: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, mínimo relativo en los puntos de abscisa: $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, punto de inflexión en los puntos de abscisa: $x=0+\frac{\pi}{2}k$.

23.- Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3-6x^2+16x-11$ en su punto de inflexión.
Solución: 4x-y-3=0

24.- En un punto de inflexión la tangente a la curva la atraviesa. Comprueba esta afirmación para la función $f(x)=x^3-6x^2+9x$.
Solución: P.I. (2,2); recta tangente: y=-3x+8; (-∞,2) convexa; (2,+ ∞) cóncava ⇒ atraviesa a f(x).

REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN DERIVADA A PARTIR DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

28.- Considera una función cuya representación gráfica en el intervalo $(-3,3)$ es la siguiente:



Haz un esbozo de la gráfica de la derivada de esta función.

Solución:
1º.- Estudiamos el crecimiento y los máximos y mínimos de la función:
$f(x)$ es creciente en $(-3,-2)\cup(0,2)$
$f(x)$ es decreciente en $(-2,0)\cup(2,3)$
$f(x)$ alcanza dos máximos en los puntos de abscisa x = -2 y x = 2.
$f(x)$ alcanza un mínimo en x = 0.

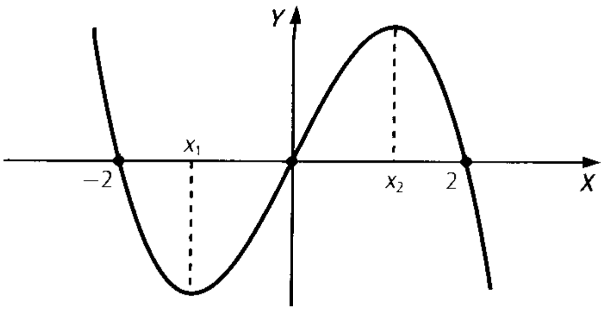
2º.- Estudiamos la curvatura y los puntos de inflexión de la función:
$f(x)$ es cóncava en (x_1,x_2)
$f(x)$ es convexa en $(-3,x_1)\cup(x_2,3)$
$f(x)$ tiene dos puntos de inflexión en los puntos de abscisa $x=x_1$ y $x=x_2$.

3º- Se expresan estos resultados en términos de la derivada:
$f'(x)>0$ en $(-3,-2)\cup(0,2)$

$f'(x) < 0$ en $(-2,0) \cup (2,3)$
$f'(x)$ tiene puntos de corte con los ejes en los puntos de abscisa x = -2 y x = 2.
$f'(x)$ tiene un mínimo en $x = x_1$.
$f'(x)$ tiene un máximo en $x = x_2$.

Observamos que los máximos y los mínimos de $f(x)$ son puntos de corte con el eje X de $f'(x)$, y los puntos de inflexión de $f(x)$ son máximos y mínimos de $f'(x)$.

4º.- Representamos la derivada de la función a partir de la información obtenida.

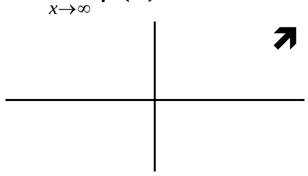


RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS

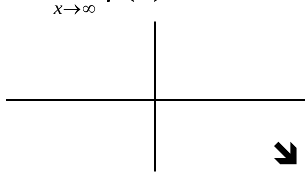
Para encontrar las ramas infinitas, calculamos los límites: $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y localizamos los valores, a, para los cuales $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Interpretación de los límites:

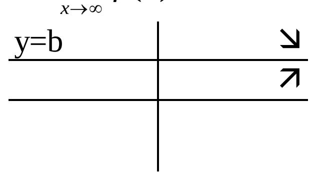
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$



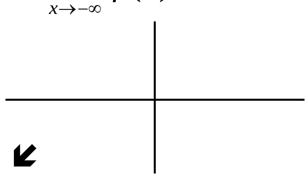
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$



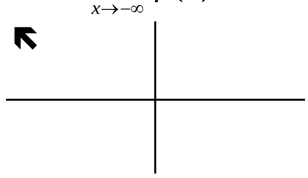
$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$



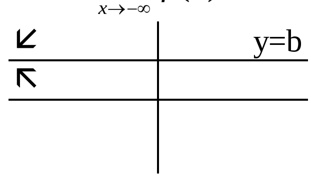
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



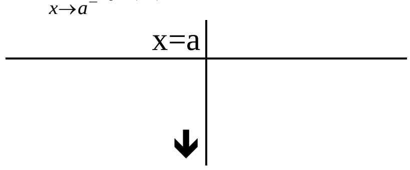
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$



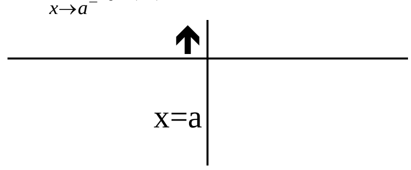
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$



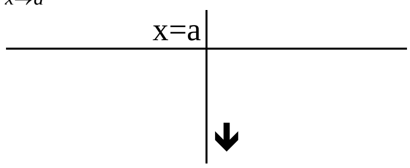
$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



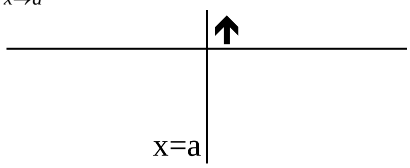
$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$



$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$



Tipos de asíntotas:

Los límites $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ dan lugar a una **asíntota horizontal**.

Los límites $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ dan lugar a una **asíntota vertical**.

Las **asíntotas oblicuas** de y=f(x), si existen, son de la forma: y=mx+b donde: $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right]$.

Observaciones prácticas acerca de las asíntotas horizontales y verticales:

- Las funciones polinómicas tienen ramas infinitas, pero no tienen asíntotas horizontales y tampoco verticales.
- Las fracciones algebraicas tienen asíntota horizontal si el numerador y el denominador tienen el mismo grado. En ese caso, es la misma asíntota por la izquierda que por la derecha.
- Las fracciones algebraicas tienen tantas asíntotas verticales como raíces tenga el denominador, salvo que el numerador tenga alguna de esas raíces; en tal caso conviene, previamente, simplificar la fracción.
- Las expresiones con radicales pueden tener dos asíntotas horizontales.
- En general, las asíntotas verticales son propias de expresiones que «*se hacen infinitas*» para valores finitos de x.

Posición relativa de la gráfica de la función respecto de la asíntota:

Para estudiar la posición de la gráfica respecto de las asíntotas oblicuas y horizontales calculamos los límites cuando x→±∞ de la diferencia entre la función y la asíntota. Si el resultado es positivo, la función está encima de la asíntota, y si es negativo, está debajo.

Ejemplos:

- La asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{3x+1}{2x}$ es la recta $y = \frac{3}{2}$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{2x} = \frac{3}{2}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{2x} = \frac{3}{2}$

  Posición de la gráfica respecto de la asíntota:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3x+1}{2x} - \frac{3}{2} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2x} = 0^- \Rightarrow$ La gráfica está debajo

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+1}{2x} - \frac{3}{2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0^+ \Rightarrow$ La gráfica está encima

- La asíntota oblicua de la función $f(x)=\dfrac{3x^2-8x+6}{3x-2}$ es la recta y=x-2

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-8x+6}{3x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-8x+6}{3x^2-2x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-8x+6}{3x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x+6}{3x-2}=-2$$

Posición de la gráfica respecto de la asíntota:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2-8x+6}{3x-2}-(x-2)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3x-2}=0^- \Rightarrow$$ La gráfica está debajo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-8x+6}{3x-2}-(x-2)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x-2}=0^+ \Rightarrow$$ La gráfica está encima

EJERCICIOS PROPUESTOS

31.- Determina, si existen, las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$

Solución: a) A.V. x=+1, x=-1; A.H. y=0; A.O. no tiene b) A.V. x=-2; A.H. no tiene; A.O. y=x-2
c) A.V. no tiene; A.H. y=1; A.O. no tiene. d) A.V. x=2; A.H. no tiene; A.O. y=x+2.

32.- Halla los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-4x^2}{2x^2-1}$ con su asíntota oblícua.

Solución: P=(2,0).

33.- Calcula las asíntotas de la función: $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^3-9x}$.

Solución: A.V. x=0, x=3, x=-3; A.H. y=2; A.O. no tiene.

34.- Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4}$ y estudia si la gráfica corta a las asíntotas.

Solución: A.V. x=4, x=-1; A.H. no tiene; A.O. y=x+4. Punto de corte: (-7/8,25/8).

35.- Encuentra las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$. ¿Cuántas asíntotas oblícuas puede tener una función racional? ¿Cuántas horizontales? ¿Cuántas verticales?

Solución: A.V. x=2; A.H. no tiene; A.O. y=(1/2)x+1. Dos oblícuas, dos horizontales e infinitas verticales.

36.- Si a∈D(f), ¿puede ser x=a una asíntota vertical?

Solución: no.

37.- Obtén las asíntotas de la siguiente función $f(x)=\frac{x^2+x-5}{x-2}$.

Solución: A.V. x=2; A.H. no tiene; A.O. y=x+3.

38.- Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas y, en caso afirmativo, hállalas:

a) f(x)=ln(x-1) b) f(x)=e^{x-1}

Solución: a) A.V. x=1; A.H. no tiene; A.O. no tiene. b) A.V. no tiene; A.H. y=0 en $-\infty$; A.O. no tiene.

39.- Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\left(x^2-9\right)$ b) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$ c) $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

Solución: a) A.V. x=3, x=-3; A.H. no tiene; A.O. no tiene. b) A.V. no tiene; A.H. y=1; A.O. no tiene. c) A.V. x=1; A.H. no tiene; A.O. y=x+2.

40.- Calcula los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la función: $y=\ln\frac{x+1}{x+2}$.

Solución: punto de corte: (0,-ln2); A.V. x=-1, x=-2; A.H. y=0; A.O. no tiene.

FUNCIONES SIMÉTRICAS Y FUNCIONES PERIÓDICAS

Una función es simétrica respecto del eje de ordenadas o eje OY si verifica: f(x)=f(-x), $\forall x\in D(f)$. Las funciones simétricas respecto del eje de ordenadas se llaman funciones pares.
Una función es simétrica respecto del origen de coordenadas si verifica: f(x)=-f(-x), $\forall x\in D(f)$. Las funciones simétricas respecto del origen de coordenadas se llaman funciones impares.
Una función es periódica de periodo T (T>0) si verifica: f(x+KT)=f(x), $\forall K\in Z$ y $\forall x\in D(f)$. Al menor valor que toma T se le llama periodo principal de la función. Cualquier múltiplo del periodo principal de la función es también un periodo de la función.

EJERCICIOS

41.- Estudia la simetría y periodicidad de las siguientes funciones: a) f(x)=sen(2x)

b) f(x)=ln(x^2-4) c) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$ d) $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$ e) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

42.- Halla el dominio, recorrido y simetrías de las siguientes funciones:

a) $f(x)=-\sqrt{x^2-4}$ b) $f(x)=\frac{-x}{x-2}$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES. ESQUEMA A SEGUIR

Para proceder al **trazado de la curva** en función de estos datos conocidos hay que seguir los siguientes pasos:

1. Separar en el plano aquellas zonas donde la función f(x) no existe.
2. Situar los puntos de corte a los ejes, los extremos y los puntos de inflexión.
3. Trazar las asíntotas.
4. Iniciar el trazado de la curva empezando por el extremo izquierdo del dominio y a lo largo de una asíntota, si la hay.
5. Continuar el trazado siguiendo los criterios de crecimiento y decrecimiento y haciendo pasar la curva por los puntos conocidos. La gráfica se concluye por el extremo derecho del dominio y a lo largo de una asíntota, si la hay.

	Propiedades	Caracterización
1	Dominio (D)	$x \in D \Leftrightarrow$ existe y tal que y=f(x)
2	Simetrías: a) Función par (simetría respecto al eje de ordenadas) b) Función impar (simetría respecto al origen de coordenadas)	 f(-x)=f(x) f(x)=-f(-x)
3	Periodicidad	f(x+T)=f(x)
4	Puntos de corte con los ejes: a) Corte con el eje OX b) Corte con el eje OY	 f(x)=0, ninguno, uno o más puntos. f(0)=y, ninguno o un punto.
5	Tendencias en $\pm\infty$.	a) Límite en $-\infty$. b) Límite en $+\infty$.
6	Asíntotas: a) Asíntotas verticales: x=a b) Asíntotas horizontales: y=k c) Asíntotas oblicuas: y=mx+n	 $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k$ $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx\right]$;m,n$\in$R;m$\neq$0.
7	Puntos de discontinuidad	$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$
8	Monotonía: a) Intervalos de crecimiento b) Intervalos de decrecimiento c) Puntos críticos	 f ´>0 f ´<0 f ´(a)=0 y f ´´(a) > 0 $\Rightarrow$ Mínimo f ´(a)=0 y f ´´(a) < 0 $\Rightarrow$ Máximo
9	Curvatura: a) Intervalos de convexidad. b) Intervalos de concavidad. c) Puntos de inflexión.	 f ´´< 0 f ´´> 0 f ´´(a)=0 y f ´´´(a) $\neq$ 0

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Se trata de problemas en los que queremos encontrar el valor máximo o mínimo (valor óptimo) de ciertas funciones de clara utilidad práctica.

En algunos casos, la dificultad del problema estriba, precisamente, en formular la función de una variable que deberemos optimizar. En otros casos, la función que hay que optimizar es una función de varias variables y el problema se inicia buscando relaciones entre las variables que, substituidas en la función original, la convierten en una función de una variable. Una vez realizado este primer paso, derivaremos la función y la igualaremos a cero. Las soluciones de esta ecuación serán los posibles valores que optimicen el resultado del problema. En el caso en que la solución no sea única, deberemos determinar qué valor nos interesa interpretando el resultado de acuerdo con las condiciones impuestas en el planteamiento y asegurándonos de que la solución sea admisible, es decir, que tenga sentido.

EJERCICIOS

23.- Sea $f(x) = x^2 \cdot 2 \cdot e^{-ax}$, donde "a" es un número positivo.

a) Estudia los máximos y mínimos y puntos de inflexión.

b) Estudia las asíntotas.

c) Representa gráficamente el caso a=1.

Solución: a) mínimo=(0,0); máximo=$\left(\frac{2}{a}, \frac{8}{a^2} \cdot e^{-2}\right)$; P.I. en $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{a}$ b) A.H. por la dcha. en y=0; no A.O.; no A.H.

24.- La recta y = 2x + 6 es una asíntota oblicua de la función: $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$.

a) Halla el valor de "k".

b) Representa la función.

Solución: a) k=3 b) D=R-{3}; puntos de corte = (0,-1/3); hay A.O.; A.V.: x=3; mínimo=(6'08,24'33); máximo=(-0'08,-0'33)

5.- Descompón el número 36 en dos sumandos positivos de modo que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

Solución: 24 y 12.

6.- Encuentra un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima.

Solución: 1/2

7.- De todos los rectángulos de perímetro 20 cm, ¿cuál es el de área máxima?

Solución: 5 cm x 5 cm.

8.- Un pastor dispone de 1000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. Halla las dimensiones de la cerca para que el área encerrada sea máxima.

Solución: 250 m x 500 m.

9.- Descompón el número 16 en dos sumandos positivos tales que su producto sea máximo.

Solución: 8 y 8.

10.- ¿Cuál es el número que sumado con 25 veces su inverso se obtiene un valor mínimo?

Solución: 5.

11.- El dueño de un manantial de agua mineral llega a la siguiente conclusión: si el precio a que vende la botella es x céntimos de €, sus beneficios serán de $-x^2+10x-21$ miles de céntimos al día. ¿Qué precio debe poner para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál será este beneficio?

Solución: 5 céntimos de €, 40 €.

12.- Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 800 €/m y la de los otros 100 €/m, halla el área del campo de mayor superficie que puede cercarse con 28800 €.

Solución: 1152 m^2.

TEOREMA DE ROLLE

Si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b], derivable en (a,b) y tal que f(a) = f(b), entonces existe $c \in (a,b)$, tal que $f'(c)=0$.

Ejercicio:

Dada la función $f(x)=x^3-2x^2+x$, comprueba si se cumple el teorema de Rolle y, en caso afirmativo, calcula c.

Solución:

A) f(x) es continua en R y por tanto en $[0,1]$ por ser un polinomio.

f(x) es derivable en R y por tanto en $(0,1)$ (polinómica).

f(0) = 0; f(1) = 0

Se cumplen las condiciones del teorema.

$$\Rightarrow f'(x)=3x^2-4x+1 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}=\begin{cases}1\\1/3\end{cases} \Rightarrow c=\frac{1}{3}$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b] y derivable en (a,b) y tal que f(a) = f(b), entonces existe $c \in (a,b)$, tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ejercicio:

Comprueba si $f(x)=x^3-3x^2-4$ cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[1,3]$. En caso afirmativo, calcula c.

Solución:

A) f(x) es polinómica, por tanto, continua en R y por tanto continua en $[1,3]$.

$f'(x)=3x^2-6x$, por tanto, derivable en R y por tanto en $(1,3)$.

Se cumplen las condiciones del teorema.

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(27-27-4)-(1-3-4)}{2}=\frac{-4+6}{2}=1 \Rightarrow f'(x)=1 \Rightarrow x=\frac{3\pm 2\sqrt{3}}{3}$$