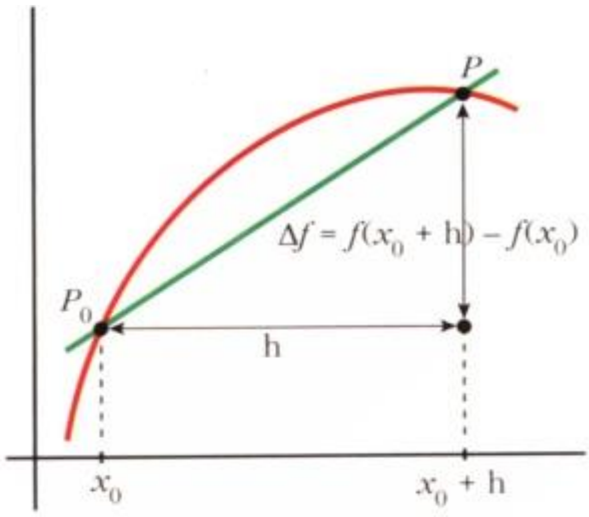
DERIVADAS

TASA DE VARIACIÓN MEDIA E INSTANTÁNEA

Dada una función y=f(x), se llama **incremento de f en un punto de abscisa "x_a"** a la expresión $\Delta f=f(x_a+h)+f(x_a)$. Su significado es la variación (aumento o disminución) de f cuando la variable independiente pasa de "x_a" a "x_a+h". A h se le llama **incremento de x**.

El **cociente incremental** $\frac{\Delta f}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se llama **tasa de variación media** y significa la variación relativa de f con relación a x en el intervalo $[x_a, x_a+h]$.

Gráficamente, *es la pendiente de la recta* que pasa por $P_0=(x_0, f(x_0))$ y $P=(x_0+h, f(x_0+h))$.

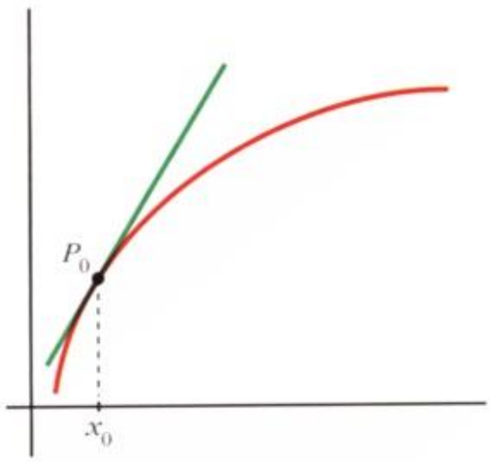


$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ es la pendiente de P_0P

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Llamamos derivada de una función f en un punto "x_0" al límite, cuando h tiende a cero, de la tasa de variación media.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Ejemplos:

- Calculemos la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en x=1: $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

Como $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ y $f(1+h) = (1+h)^2 + 1 = 1 + 2h + h^2 + 1 = h^2 + 2h + 2$, sustituyendo:

$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h + 2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2) = 2$. Por tanto f'(1)=2.

- Calcularemos la derivada de f(x) = x en el punto x = 2:

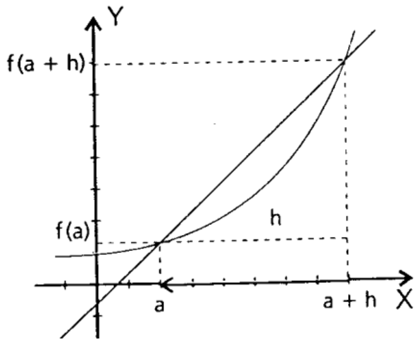
$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h) - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2+h-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Es decir, f(x) = x es derivable en el punto x = 2 y f'(2) = 1.

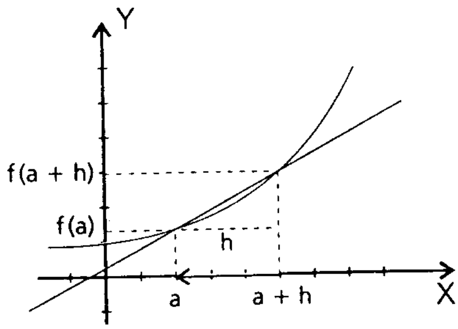
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Hemos visto que la Tasa de Variación Media es la proporción entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa en el intervalo [a,b] y que, por tanto, se trata de la pendiente de la recta secante a la gráfica de f(x) en el intervalo [a,b].

Si tomamos una función f que es derivable en x=a, y consideramos los puntos P=(a,f(a)) y Q=(a+h,f(a+h)), la recta que pasa por estos dos puntos es secante a la gráfica de f, y la tasa de variación media, $TVM = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, es su pendiente.

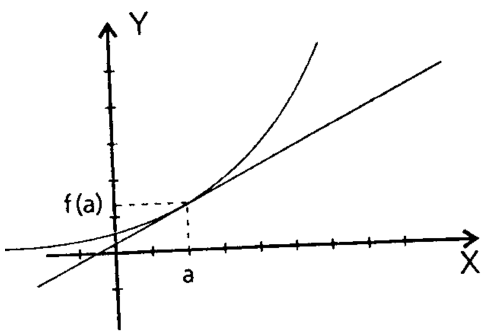


Al calcular la derivada de la función f en el punto a, esto es, f'(a), se toma el límite de TVM cuando h tiende a cero. Pero si h se hace cada vez más pequeño, el punto a+h se aproxima al punto a y el punto f(a+h) al punto f(a), es decir, el punto Q tiende al punto P, y la recta secante a la gráfica de la función f, que pasa por los puntos P y Q, tiende a la recta tangente a la gráfica de f en el punto P.



Así pues, si queremos hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de y=f(x) en x=a, disponemos de los siguientes datos:

- El punto de tangencia es (a,f(a)).
- La pendiente de la recta es m=f'(a).



A partir de estos datos se obtiene que:
La **ecuación de la recta tangente** a la gráfica y=f(x) en el punto x=a es:

y-f(a)=f`(a)(x-a)

Ejemplos:

- Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ en x=1.

$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \Rightarrow y - 2 = 2(x-1)$, ya que $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2\cdot 1 = 2$.

- Hallemos la ecuación de la recta tangente a la parábola $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ en el punto de x=2.

Como f(a) = f(2) = 12, el punto de tangencia es (2,12). Además, f'(x) = 6x – 2.
Por tanto, la pendiente de la recta tangente a f en x=2 será: m = f'(2) = 10.
Entonces, la ecuación de la recta tangente a f en x=2 es:

$$y - 12 = 10 \cdot (x-2)$$

DERIVADAS LATERALES

Partiendo de **la derivada en un punto:**

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Se llama **derivada por la izquierda** de la función f en el punto x="x_0" a al siguiente límite, si es que existe:

$$f'\left(x_0^-\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Se llama **derivada por la derecha** de la función f en el punto x="x_0" a al siguiente límite, si es que existe:

$$f'\left(x_0^+\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

La derivada por la izquierda y por la derecha se llaman **derivadas laterales**.
Para que exista la derivada de una función continua en un punto, deben existir sus derivadas laterales y ser iguales. Entonces se dice que la función es derivable en dicho punto.

Una función es **derivable en un intervalo abierto** (a,b) si lo es en cada uno de sus puntos.
Una función es **derivable en un intervalo cerrado** [a,b] si es derivable en cada punto de (a,b) y derivable por la derecha en a y por la izquierda en b.

Ejemplo:

Veamos si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$ *es derivable en x = 1.*

Sabemos que es continua en x=1.

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h(h+2)}{h} = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h) - 1}{h} = 1$$

Como las derivadas laterales son distintas, entonces f no es derivable en x = 1.

EJERCICIOS PROPUESTOS

5º.- Aplicando la definición de derivada, calcula la derivada de la función: $f(x) = \sqrt{3x+1}$.

6º.- Aplicando la definición de derivada, calcula la derivada de la función: $f(x) = |2x - 4|$ en el punto x=2.

7º.- Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=-3$; $f`(2)$ b) $f(x)=\dfrac{-5}{x}$; $f`(1)$ c) $f(x)=3x^2-2x+2$; $f`(-1)$

D) $f(x)=(2x-1)^2$; $f`(2)$ e) $f(x)=\sqrt{x+3}$; $f`(6)$ f) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$; $f`(0)$

Soluciones: 5) $f`(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ 6) no es derivable en x=2 7) a) $f`(2)=0$

b) $f`(1)=5$ c) $f`(-1)=-8$ d) $f`(2)=12$ e) $f`(6)=1/6$ f) $f`(0)=0$

CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Si una función es derivable en un punto "a" (derivada finita), entonces es continua en él. (El recíproco no es cierto).

Una función es continua en un punto "a" si $\lim_{x\to a} f(x)= f(a)$, o lo que es lo mismo, si:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=0$$

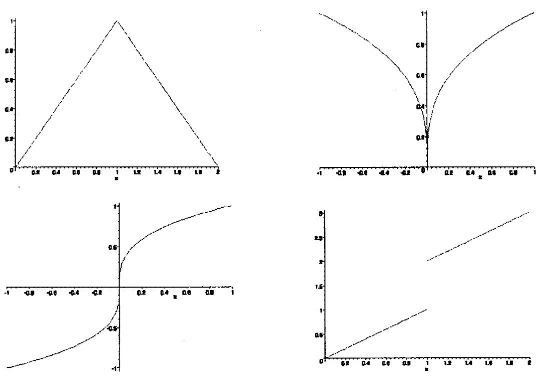
Vamos a demostrar que esto se cumple:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{f(x)-f(a)}}{x-a}\cdot(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f`(a)\cdot 0=0$$

Hay algunas intuiciones gráficas que nos pueden dar idea de la derivabilidad de una función en un punto x_0:

- La función no presenta "picos".
- La tangente no es vertical.
- Las semirrectas tangentes son complementarias, es decir, forman una recta y, además, esta recta no es vertical.

Es decir, se trata de evitar situaciones como las siguientes:



Estas intuiciones gráficas se conectan con la formalización del criterio de derivabilidad:

- f es continua en x_0.

- Existen (y son finitas) las dos derivadas laterales $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ y $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, y son iguales. Al decir que son **finitas**, interpretamos que **la función no es derivable en los puntos de tangente vertical**.

De todo esto se deduce que no sería válido siempre el método consistente en comprobar que f es continua en x_0 y que existen y son finitos e iguales $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ y $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$.

- Un ejemplo de función con la que no sería válido el segundo método es la siguiente:

$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, que es derivable en x=0 y se cumple que f'(0) = 0.

Comprobamos que la función es continua en x = 0:

$$f(0) = 0 = \lim_{h\to 0} f(x) \Rightarrow f(x) \quad continua \quad en \quad x = 0.$$

Se debe observar que si deriváramos directamente la función cuando $x \neq 0$ el resultado sería distinto:

$f' = 2xsen\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2xsen\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, pues, aunque $\lim_{x\to 0} 2xsen\frac{1}{x} = 0$, no existe $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$.

Por tanto, calculamos la derivada en $x = 0$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 sen\frac{1}{x+h} - x^2 sen\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)sen\frac{1}{x+h} - x^2 sen\frac{1}{x}}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 sen\frac{1}{0+h}}{h} = \lim_{h\to 0} hsen\frac{1}{h} = 0$$

, como queríamos demostrar.

Ejemplo: Estudia la derivabilidad en $x_0 = 2$ de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ 3x-2 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$:

- Continuidad en $x_0 = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 4 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(3x-2) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4 \Rightarrow$$ f(x) es continua en $x_0 = 2$.

- Derivabilidad en $x_0 = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{4h+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}(4+h) = 4 \\ f'(2^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{3(2+h)-2-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Las derivadas laterales existen pero no coinciden. Por tanto, f no es derivable en $x_0 = 2$. Es un punto anguloso.

Ejemplo: Calcula m y n para que la siguiente función sea derivable en $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & si \quad x \le 1 \\ -x^2 + nx & si \quad x > 1 \end{cases}:$$

Continuidad en $x_0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1-5+m \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1-5+m \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1+n \end{array}\right\} \Rightarrow 1-5+m = -1+n \Rightarrow m-4 = n-1$$

Derivabilidad en $x_0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{(1+h)^2 - 5(1+h) + m - (-4+m)}{h} = -3 \\ f'(1^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-(1+h)^2 + n - (-1+n)}{h} = -2+n \end{array}\right\} \Rightarrow -3 = -2+n$$

La función será derivable si se cumplen las dos condiciones anteriores:

$$\left.\begin{array}{l} m-4 = n-1 \\ -3 = n-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m-n = 3 \\ n = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 2; n = -1$$

Entonces f es derivable en $x_0 = 1$ si m=2 y n=-1. Su derivada es f'(1)=-3.

EJERCICIOS PROPUESTOS

65.- Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en x=0:

a) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{x} & \mathrm{si} \quad \mathrm{x} \ge 0 \\ \mathrm{-x} & \mathrm{si} \quad \mathrm{x} < 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{-x^2 + 1} & \mathrm{si} \quad \mathrm{x} < 0 \\ 1 & \mathrm{si} \quad \mathrm{x} \ge 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{-x^2 - x} & \mathrm{si} \quad \mathrm{x} \le 0 \\ \mathrm{senx} & \mathrm{si} \quad \mathrm{x} > 0 \end{cases}$

Soluciones: a) no es derivable en x=0 b) es derivable en x=0 c) no es derivable en x=0

66.- Sea la función $f(x) = x \cdot |x|$. Estudia su derivabilidad en x=0. *Solución:* si es derivable en x=0

67.- Se considera la función f:R→R dada por $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

a) Estudia su derivabilidad.
b) Encuentra f ``(x).

Solución: a) derivable para todo x∈R b) $f``(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(1+\mathrm{x})^3} & \text{si} \quad \mathrm{x}>0\\ \dfrac{2}{(1-\mathrm{x})^3} & \text{si} \quad \mathrm{x}<0\end{cases}$

68.- Sea f(x) una función que es continua y derivable en el punto x=0. Sea F(x) la nueva función definida así:

$$\begin{cases}F(x)=|x|\cdot\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right) & si \quad x\neq 0\\ F(0)=a\end{cases}$$

¿Cuánto debe valer f(0) y "a" para que F(x) sea continua en x=0? Para dichos valores, ¿cuánto debe valer f'(0) para que F(x) sea derivable en x=0? Halla entonces F'(0).
Solución: a=f(0)=0; f'(0)=-1; F'(0)=0

69.- Calcula los valores que hay que asignar a "a" y "b" para que la siguiente función sea continua y derivable:

$$f(x)=\begin{cases}ax^2-bx+1 & si \quad x\leq 0\\ (x+a)e^{bx} & si \quad x>0\end{cases}$$

Solución: a=1, b=0

70.- Determina el valor del parámetro "a" para que la función f sea derivable en todo su dominio de definición:

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot\log x & si \quad 0<x\leq 1\\ a\left(1-e^{-x}\right) & si \quad 1<x\end{cases}$$

Solución: continua para a=0, pero no derivable.

71.- Se considera la función definida por las expresiones:

$$f(x)=\begin{cases}a+x+\ln(x+1) & si \quad x\geq 0\\ x^2+be^{-x} & si \quad x<0\end{cases}$$

Calcula "a" y "b" para que f sea continua y derivable en el punto x=0.
Solución: a=b=-2

FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS

La **función derivada** de una función f dada (o simplemente derivada) es una función que asocia a cada x, donde la función es derivable, su derivada f'(x).

La función derivada de y=f(x), se designa por **y'=f'(x)** o por **Df(x).**

La función derivada de y=f(x) se designa por **y'=f'(x)** o **Df(x)** y viene dada por:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ejemplos:

- Calculemos la función derivada de la función $f(x)=5x^2$. Para ello sustituimos a por x en la definición de derivada:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^2-5x^2}{h}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{10x\cdot h+5h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(10x+5h)}{h}=10x$$

Por ejemplo, en x=1: f'(1)=10·1=10.

- Vamos a calcular la función derivada de la función $f(x)=\frac{5}{x}$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{5}{x+h}-\frac{5}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-5h}{x\cdot(x+h)\cdot h}=\lim_{h\to 0}\frac{-5}{x\cdot(x+h)}=\frac{-5}{x^2}$$

Conocida la función derivada $f'(x)=\frac{-5}{x^2}$, podemos calcular la derivada de f en cualquier punto. Por ejemplo: $f'(1)=\frac{-5}{1^2}=-5$ o $f'(2)=\frac{-5}{2^2}=\frac{-5}{4}$.

- **Derivadas sucesivas:**

A partir de la función derivada primera se puede definir también, si existe, su derivada, y recibe el nombre de **derivada segunda**. Se designa por **y''=f''(x)** o $D^2 f(x)$.
Análogamente se definen las funciones derivadas tercera, cuarta, …, **n-ésima**, que se designan por f'''(x), $f^{(4}(x)$, …, $f^{(n}(x)$ o D'''f(x), $D^4 f(x)$, …, $D^n f(x)$.

LA FUNCIÓN COMPUESTA

Si la función h(x) se puede poner como h(x)=g(f(x)), se dice que está compuesta por f y g y se escribe así: h=gºf

Se lee **f compuesta con g**. Observa que se leen en sentido contrario a como se escriben.

OPERACIONES CON DERIVADAS

Suma y resta	(f+g)`=f`+g`	(f-g)`=f`-g`
Producto y cociente	(f·g)`=f`·g+f·g`	$\left(\frac{f}{g}\right)`=\frac{f`g-f\cdot g`}{g^2}$
Producto por un número	(k·f)`=k·f`	
Composición	[g(f(x))]`=g`(f(x))·f`(x)	

REGLAS PARA EL CÁLCULO DE DERIVADAS

1. **Derivada del producto de un número por una función**

Consideramos la función f(x)=k·g(x)

1º. f(x+h)=k·g(x+h);

2º. f(x+h)-f(x)=k·[g(x+h)-g(x)]

3º. $\frac{\mathrm{f(x+h)\text{ - }f(x)}}{h}=k\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

4º. $\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{f(x+h)\text{ - }f(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}k\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=k\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=k\cdot g`(x)$

Se ha obtenido, pues, que **D[k · g(x)]=k · g'(x)**

2. **Suma**

Consideramos la función Φ(x)=f(x)+g(x)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(\mathrm{x+h})\text{ - }\Phi(\mathrm{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g\left[f(\mathrm{x+h})\right]\text{ - }\mathrm{g}\left[\mathrm{f(x)}\right]}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g`\left[f(x)\right]\cdot f`(x)$$

Se ha obtenido, pues, que **D[f(x)+g(x)]=f'(x)+g'(x)**

3. **Logaritmo neperiano**

Consideramos la función Φ(x)=ln x, x>0

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(\mathrm{x+h})\text{ - }\Phi(\mathrm{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\frac{x+h}{h}=\lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{x+h}{h}\right)^{\frac{1}{h}}=$$

$$=\ln\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h}{h}\right)^{\frac{1}{h}}=\ln e^{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{x+h}{h}-1\right)}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

Se ha obtenido, pues, que **D[ln(x)]=** $\frac{1}{x}$

4. **Logaritmo de base cualquiera**

Consideramos la función F(x)=$\log_a$x, a>0, x>0

$$D\left(\log_a x\right)=D\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right]=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\log_a e\cdot\frac{1}{x}$$

Se ha obtenido, pues, que $D\left(\log_a x\right)=\log_a e\cdot\frac{1}{x}$

5. **Derivación de la función compuesta: regla de la cadena**

Consideramos la función F(x)=g(f(x))

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(\mathrm{x+h})\text{ - }\Phi(\mathrm{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g\left[f(x+h)\right]-g\left[f(x)\right]}{f(x+h)-f(x)h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g`\left[f(x)\right]\cdot f`(x)$$

Se ha obtenido, pues, que: **D[g(f(x))]=g'(f(x))· f´(x)**

6. **Potencia**

Consideramos la función $F(x)=x^k$, $x>0$

Antes de derivar tomamos logaritmos en los dos miembros: $\ln F(x)=k\cdot\ln x$

Ahora, derivamos: $\frac{F`(x)}{F(x)}=k\cdot\frac{1}{x}$

Se despeja F'(x) y se sustituye F(x) por su valor, x^k: $F`(x)=k\cdot\frac{1}{x}\cdot x^k=k\cdot x^{k-1}$

(Observa que la demostración es válida para un exponente k cualquiera)

Se ha obtenido, pues, que **$D[x^k]=k\cdot x^{k-1}$, $x>0$ $k\in R$**

7. **Producto**

Consideramos la función $F(x)=f(x)\cdot g(x)$

Vamos a aplicar el mismo método que en el apartado 5, es decir, la *derivación logarítmica*:

$$\ln F(x)=\ln [f(x)\cdot g(x)]=\ln f(x)+\ln g(x)$$

$$\frac{\Phi`(x)}{\Phi(x)}=\frac{f`(x)}{f(x)}+\frac{g`(x)}{g(x)}$$

$$\Phi`(x)=f(x)\cdot g(x)\cdot\left[\frac{f`(x)}{f(x)}+\frac{g`(x)}{g(x)}\right]=f`(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g`(x)$$

Se ha obtenido, pues, que: **$D[f(x)\cdot g(x)]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$**

8. **Cociente**

Consideramos la función $\Phi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x)\neq 0$

$$\Phi(x)=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

Aplicamos la regla de derivación del producto:

$$\Phi`(x)=f`(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{-g`(x)}{[g(x)]^2}=\frac{f`(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g`(x)}{[g(x)]^2}$$

Hemos obtenido, pues, que:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f`(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g`(x)}{[g(x)]^2}$$

9. **Exponencial de base e**

Consideramos la función $\Phi(x)=e^x$

Recurrimos a la derivación logarítmica

$\ln\Phi(x)=\ln e^x=x$

$\frac{\Phi`(x)}{\Phi(x)}=1$, por tanto, $\Phi`(x)=\Phi(x)=e^x$

Hemos obtenido, pues, que: **$D[e^x]=e^x$**

10. **Exponencial de base constante cualquiera**

Consideramos la función $F(x)=a^x$

$F(x)=a^x=e^{x\cdot\ln a}$

$F'(x)=e^{x\cdot\ln a}\cdot D(x\cdot\ln a)=e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a=\ln a\cdot a^x$

Hemos obtenido, pues, que: **$D[a^x]=\ln a\cdot a^x$**

(Derivación logarítmica: $a^x=y \Rightarrow \ln y = x\cdot\ln a \Rightarrow \frac{y`}{y} = \ln a \Rightarrow y` = \ln a \cdot y = \ln a \cdot a^x$).

(Propiedades de los logaritmos: $a^x=B \Rightarrow x\cdot\ln a=\ln B \Rightarrow e^{x\cdot\ln a}=e^{\ln B}=B$).

11. **Seno**

Consideramos la función $\Phi(x)=\operatorname{sen}x$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\cos\frac{x+h+x}{2}\,sen\frac{x+h-x}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x$$

Hemos obtenido, pues, que: **D[senx]=cosx**

12. **Coseno**

Consideramos la función F(x)=cosx:

F(x)=cosx=sen$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

F'(x)= $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-senx$

Hemos obtenido, pues, que **D[cosx]=-senx**

13. **Tangente**

Consideramos la función F(x)=tgx:

$$\Phi(x)=tgx=\frac{senx}{\cos x}$$

$$\Phi`(x)=\frac{\cos x\cos x-\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+sen^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$$

Hemos obtenido, pues, que: $D[tgx]=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$

REGLAS DE DERIVACIÓN

TABLA DE DERIVADAS		
SUMA DE DOS FUNCIONES	D[f+g] = D[f] + D[g]	
PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UNA FUNCIÓN	D[k·f] = k · D[f]; k∈R	
PRODUCTO DE DOS FUNCIONES	D[f·g] = D[f] · g + f · D[g]	
COCIENTE DE DOS FUNCIONES	$D\left[\frac{f}{g}\right]=\frac{D[f]\cdot g-f\cdot D[g]}{g^2}$	
FUNCIÓN COMPUESTA	D[g∘f]=g′(f)·f′	
FUNCIÓN CONSTANTE	D[k]=0, k∈R	
FUNCIÓN IDENTIDAD	D[x]=1	
FUNCIÓN POTENCIAL	$D\left[x^a\right]=a\cdot x^{a-1}$	$D\left[f^a\right]=a\cdot f^{a-1}\cdot f'$
	$D\left[\sqrt{x}\right]=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\left[\sqrt{f}\right]=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
FUNCIÓN EXPONENCIAL	$D\left[e^x\right]=e^x$	$D\left[e^f\right]=e^f\cdot f'$
	$D\left[a^x\right]=a^x\cdot\ln a$	$D\left[a^f\right]=a^f\cdot\ln a\cdot f'$
FUNCIÓN LOGARÍTMICA	$D[\ln x]=\frac{1}{x}$	$D[\ln f]=\frac{f'}{f}$
	$D[\log_a x]=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$	$D[\log_a f]=\frac{f'}{f}\cdot\frac{1}{\ln a}$
FUNCIÓN SENO	D[senx]=cosx	D[senf]=cosf·f′
FUNCIÓN COSENO	D[cosx]=-senx	D[cosf]=-senf·f′
FUNCIÓN TANGENTE	$D[\operatorname{tg} x]=1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$D[\operatorname{tg} f]=\left(1+\operatorname{tg}^2 f\right)\cdot f'=\frac{f'}{\cos^2 x}$
FUNCIÓN ARCO SENO (= - ARCO COSENO)	$D(\operatorname{arcsen} x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D(\operatorname{arcsen} f)=\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
FUNCIÓN ARCO TANGENTE (= - ARCOCOTANGENTE)	$D(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{1+x^2}$	$D(\operatorname{arctg} f)=\frac{f'}{1+f^2}$
FUNCIÓN	FUNCIÓN SIMPLE	FUNCIÓN COMPUESTA

Ejemplos:

$$D\left[(3x+5)^7\right]=7\cdot(3x+5)^6\cdot 3$$

$$D\left[e^{2x+3}\right]=e^{2x+3}\cdot 2$$

$$D\left[\ln\sqrt{x}\right]=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\left[\cos x^2\right]=-\operatorname{sen} x^2\cdot 2x$$

$$D(\arccos 5x^2)=\frac{-10x}{\sqrt{1-\left(5x^2\right)^2}}$$

$$D\left[\sqrt{9x^2}\right]=\frac{18x}{2\sqrt{9x^2}}=\frac{9x}{\sqrt{9x^2}}$$

$$D\left[5^{7x-4}\right]=5^{7x-4}\cdot\ln 5\cdot 7$$

D[sen3x]=cos3x·3

$$D\left[\operatorname{tg} x^4\right]=\left(1+\operatorname{tg}^2 x^4\right)\cdot 4x^3$$

$$D(\operatorname{arctg} e^x)=\frac{e^x}{1+\left(e^x\right)^2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

18.- Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1) $y=2x^3-4x^2+5x-8$

2) $y=x^4-5x^3+x$

3) $y=x^{-4}+3x^{-2}-5x^{-1}+4$

4) $y=2x^{-5}+3x^{-2}-2x^{-1}$

5) $y=6x^{2/3}+4x^2-3x^{1/2}-8$

6) $y=3x^{2/5}-2x^{-1/4}+3x^{2/3}$

7) $y=(x+4)\cdot(3x^2+1)$

8) $y=5\cdot(x-1)\cdot(2x^3-2)\cdot(x^2-3)$

9) $y=2x^3(x^2+5x)$

10) $(2x^2+1)^3$

11) $y=\frac{x^3}{3}\left(=\frac{1}{3}x^3\right)$

12) $y=\frac{x^2+8x}{5}$

13) $y=\frac{5}{x^2+8x}$

14) $y=\frac{x^3-2x}{x^2+3}$

15) $y=\frac{3x^3-2x^2+5x}{3}$

16) $y=\sqrt{5x^2-3x+2}$

17) $y=4\sqrt{2x^3+5x^2-1}$

18) $y=(3x^2-1)\sqrt{5x^3-7x}$

19) $y=\sqrt{x^2+1}\,\frac{x^3+5x^2-1}{2x}$

20) $y=(2x^3-4x^2+5x-1)^3$

21) $y=\left(\frac{x^4-2}{3x^2+4x}\right)^2$

22) $y=\sqrt{\frac{3x+1}{3x-1}}$

23) $y=1+\sqrt[4]{1+x^2}$

24) $y=\operatorname{sen}x$

25) $y=\operatorname{sen}^2x$

26) $y=\operatorname{sen}x^2$

27) $y=\operatorname{tg}2x$

28) $y=2\operatorname{tg}x$

29) $y=\operatorname{tg}x^2$

30) $y=\cos 2x$

31) $y=2\cos x$

32) $y=\cos^2 2x$

33) $y=\operatorname{sen}x^2+\cos^2x$

34) $y=\cos^3x+\cos x^3-\cos 3x$

35) $y=Ln(x^2+3x)$

36) $y=xLnx$

37) $y=\operatorname{sen}^2x^2$

38) $y=Ln\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}$

39) $y=Ln(senx)$

40) $y=Ln(tgx^2)$

41) $y=Ln(tg(senx))$

42) $y=2^{3x+1}$

43) $y = 3^{2x^2+5x}$

44) $y=e^{3x}$

45) $y = 3^{x^2} + Ln(\cos 3^{x^2})$

46) $y = (x - \sqrt{1-x^2})^2$

47) $y = 3^{\sqrt{\cos x}}$

48) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$

49) $y=e^{tgx}$

50) $y = \dfrac{x^2 \cos x}{(x+1)^2}$

51) $y = \left(\dfrac{2x-1}{3\mathrm{x}+4}\right)^4 \cdot x^3$

52) $y=e^{sen2x}$

53) $y = a^{\cos^2 x}$

54) $y = \dfrac{x \cos x}{x^2 - 1}$

55) $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 senx}$

56) $y = (Lnx + 1)\sqrt{1+x^2}$

57) $y = e^{-x^2} \cdot (x^4 + 2x^2 + 2)$

58) $y = (x^3 - 1) \cdot sen^2 x - tg\dfrac{x}{2}$

59) $y=Ln(\cos^2 x - sen^2 x)$

60) $y = Ln\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

61) $y=(x^2-2)senx+2x\cos x+5$

62) $y = \dfrac{1}{3}Ln\left[\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}\right]$

63) $y=arcsen2x$

64) $y=arcsen(x^2+1)$

65) $y = \arccos\sqrt{x}$

66) $y=arcsen(\cos x)$

67) $y=arctg(x^2+1)$

68) $y = arctg\sqrt{x}$

69) $y=arctg(Lnx)$

70) $y=arctge^x$

71) $y=tg(Ln(x^2+1))$

72) $y=cotg(x^2+1)^2$

73) $y = Ln(e^{2x} + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$

74) $y = arctg\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

75) $y=\frac{1}{2}Ln\frac{1-x}{1+x}+\text{arcsen}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

<u>*Soluciones:*</u>

1) $y'=6x^2-8x+5$

2) $y'=4x^3-15x^2+1$

3) $y'=-4x^{-5}-6x^{-3}-5x^{-2}$

4) $y'=-10x^{-6}-6x^{-3}+2x^{-2}$

5) $y'=4x^{-1/3}+8x-\frac{3}{2}x^{-1/2}$

6) $y'=\frac{6}{5}x^{-3/5}+\frac{1}{2}x^{-5/4}+2x^{-1/3}$

7) $y'=9x^2+24x+1$

8) $y'=5(2x^3-2)(x^2-3)+5(x-1)6x^2(x^2-3)+5(x-1)(2x^3-2)2x$

9) $y'=6x^2(x^2+5x)+2x^3(2x+5)$

10) $y'=3(2x^2+1)4x$

11) $y'=x^2$

12) $y'=\frac{2x+8}{5}$

13) $y'=\frac{-5(2x+8)}{(x^2+8x)^2}$

14) $y'=\frac{(3x^2-2)(x^2+3)-(x^3-2x)2x}{(x^2+3)^2}$

15) $y'=\frac{1}{3}(9x^2-4x+5)$

16) $y'=\frac{10x-3}{2\sqrt{5x^2-3x+2}}$

17) $y'=\frac{12x^2+20x}{\sqrt{2x^3+5x^2-1}}$

18) $y'=6x\sqrt{5x^3-7x}+\frac{(3x^2-1)(15x^2-7)}{2\sqrt{5x^3-7x}}$

19) $y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\frac{x^3+5x^2-1}{2x}+\sqrt{x^2+1}\frac{(3x^2+10x)2x-(x^3+5x^2-1)2}{4x^2}$

20) $y'=3(2x^3-4x^2+5x-1)^2(6x^2-8x+5)$

21) $y'=2\frac{x^4-2}{3x^2+4x}\frac{4x^3(3x^2+4x)-(x^4-2)(6x+4)}{(3x^2+4x)^2}$

22) $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}}\frac{3(3x-1)-(3x+1)3}{(3x-1)^2}$

23) $y'=\frac{1}{4}(1+x^2)^{-3/4}2x$

24) $y'=\cos x$

25) $y'=2\cdot \text{sen}x\cdot\cos x$

26) $y'=2x\cdot\cos(x^2)$

27) $y'=\frac{2}{\cos^2 2x}$

28) $y'=\frac{2}{\cos^2 x}$

29) $y'=\frac{2x}{\cos^2 x^2}$

30) $y'=-2\cdot\text{sen}2x$

31) $y'=-2\text{sen}x$

32) $y'=-4\cdot\text{sen}2x\cdot\cos 2x$

33) $y'=2x\cdot\cos(x^2)+2\cos x\cdot(-\text{sen}\,x)$

34) $y'=-3\,\text{sen}\,x\cos^2 x-3x^2\,\text{sen}\,x^3+3\,\text{sen}\,3x$

35) $y'=\frac{2x+3}{x^2+3x}$

36) $y'=\ln x+1$

37) $y'=4x\cdot\text{sen}(x^2)\cdot\cos(x^2)$

38) $y'=\frac{x^2+8}{x^3+4x}$

39) $y'=\frac{1}{\text{tg}\,x}$

40) $y'=\frac{2x}{senx^2\cos x^2}$

41) $y'=\frac{1}{\text{tg}(\text{sen}\,x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(\text{sen}\,x)}\cdot\cos x$

42) $y'=2^{3x+1}\cdot 3\cdot\ln 2$

43) $y'=3^{2x^2+5x}\cdot(4x+5)\cdot\ln 3$

44) $y'=3\cdot e^{3x}$

45) $y' = 3^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 3 \cdot \left(1 - \operatorname{tg} 3^{x^2}\right)$

46) $y' = 2\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

47) $y' = 3^{\sqrt{\cos x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\operatorname{sen} x)$

48) $y' = \frac{5}{2} x^{3/2}$

49) $y' = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$

50) $y' = \frac{\left(2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x\right)(x+1)^2 - x^2 \cos x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$

51) $y' = 4\left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)^3 \frac{2(3x+4)-(2x-1)3}{(3x+4)^2} x^3 + \left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)^4 3x^2$

52) $y' = e^{\operatorname{sen} 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2$

53) $y' = a^{\cos^2 x} \cdot \ln a \cdot 2\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)$

54) $y' = \frac{(\cos x - x \operatorname{sen} x)(x^2-1) - 2x^2 \cos x}{(x^2-1)^2}$

55) $y' = \frac{(3x^2-6x)x^2 \operatorname{sen} x - (x^3 - 3x^2 + 1)(2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x)}{x^4 \operatorname{sen}^2 x}$

56) $y' = \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2} + (\ln x + 1)\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$

57) $y' = e^{-x^2}(-2x)(x^4 + 2x^2 + 2) + e^{-x^2}(4x^3 + 4x)$

58) $y' = 3x^2 \operatorname{sen}^2 x + (x^3 - 1) 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \frac{1}{\cos^2(x/2)} \cdot \frac{1}{2}$

59) $y' = \frac{-4 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$

60) $y' = \frac{-2e^x}{1 - e^{2x}}$

61) $y' = x^2 \cos x$

62) $y' = \frac{-x-1}{(x^2+x+1) \cdot (x-1)}$

63) $y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

64) $y' = \frac{2}{\sqrt{-x^2-2}}$

65) $y' = \frac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

66) $y' = -1$

67) $y' = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

68) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

69) $y' = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$

70) $y' = \frac{e^x}{1 + (e^x)^2}$

71) $y' = \frac{1}{\cos^2\left[\ln(x^2+1)\right]} \cdot \frac{2x}{x^2+1}$

72) $y' = \frac{-2(x^2+1) \cdot 2x}{\operatorname{sen}^2\left[(x^2+1)^2\right]}$

73) $y' = \frac{e^{2x}\left(2\sqrt{1+e^{2x}} + 1\right)}{e^{2x}\left(\sqrt{1+e^{2x}} + 1\right) + 1}$

74) $y' = \frac{1}{2}$

75) $y' = \frac{-1}{1-x^2} + \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-2x^2}}$

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Cuando queremos derivar una función formada por una función elevada a otra función (función potencial-exponencial), existe un método consistente en tomar logaritmos en ambos miembros de la expresión inicial, de forma que, por las propiedades de los logaritmos, la función del exponente queda multiplicando al logaritmo de la base (por las propiedades de los logaritmos), con lo que nos queda la derivada de un producto.

Derivación logarítmica: $a^x = y \Rightarrow \ln y = \ln a^x = x \cdot \ln a \Rightarrow \frac{y`}{y} = \ln a \Rightarrow y` = \ln a \cdot y = \ln a \cdot a^x$.

(Propiedades de los logaritmos: $a^x=B \Rightarrow x\cdot\ln a=\ln B \Rightarrow e^{x\cdot\ln a}=e^{\ln B}=B$).

Ejemplo: $y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x = x\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x\frac{1}{x} \Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

19.- Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = \sqrt[x]{x}$ 2) $y=x^{\operatorname{sen} x}$ 3) $y=(\operatorname{sen} x)^{Lnx}$

4) $y=(x^3+1)^{2x}$ 5) $y = \sqrt[x+1]{x^2+3x}$ 6) $y=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

Soluciones:

1) $y' = \sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}$

2) $y' = x^{\operatorname{sen} x}(\cos x \ln x + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x})$

3) $y' = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}\left(\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{x} + \frac{\ln x}{\operatorname{tg} x}\right)$

4) $y' = (x^3+1)^{2x}\left[2\ln(x^3+1) + \frac{6x^3}{x^3+1}\right]$

5) $y' = \sqrt[x+1]{x^2+3x}\left[\frac{-\ln(x^2+3x)}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}\,\frac{2x+3}{x^2+3x}\right]$

6) $y' = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$